

# 相対性理論の講義ノート

百武慶文

最終更新日: 2012年6月27日

## 1 はじめに

私たちは、Newton 力学の運動の法則を習う際に、慣性の法則とそれが成り立つ慣性系を導入した。そして、あらゆる慣性系の下で、物質は Newton の運動方程式に従うとして力学の問題に取り組んだ。これは言い換えると、慣性系は力学の法則が成り立つ座標系を規定している、と言える。

例えば、私たちは止まっている車の中で、コップに水を注いで飲むことができる。そして一旦車が加速しだすと、途端にコップの水面は波打ち、水を飲むことが難しい作業となる。しかし、車が等速で運動をすると、止まっているときと同じようにコップに水を注いで飲むことができる。この経験則は、車が止まっているときの座標系と等速で運動している座標系は慣性系であるが、加速している座標系は慣性系ではないことを物語っている。また別の例としては、私たちは東を向いても西を向いても同じように、コップに水を注いで飲むことができる。これは空間の方向を変えた座標系でも力学の法則は変わらないことを表している。

Newton 力学では、ある慣性系  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$  と別の慣性系  $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3)$  がある場合、それらの間には

$$y^i = R^i_j x^j + v^i t + a^i, \quad (\vec{y} = R \vec{x} + \vec{v} t + \vec{a}), \quad (1)$$

なる関係がある。ここで  $t$  はどちらの慣性系でも共通な時間であり、 $i, j = 1, 2, 3$  である。上式で  $j$  は上と下に 1 回ずつ現れているが、このような場合  $j$  については和をとっているとする。つまり  $\sum_{j=1}^3$  を省略しているのだが、これは Einstein の縮約記法と呼ばれるもので、単に和記号の煩わしさを避けるために過ぎない。 $R^i_j$  は、 $R^T R = 1_3$  を満たす  $3 \times 3$  の回転行列  $R$  の  $(i, j)$  成分であり、 $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$  は速度ベクトル、 $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$  は定数ベクトルである。 $R = 1_3$  かつ  $\vec{a} = 0$  のとき、変換 (1) のことを Galilei 変換と呼ぶ。Newton 力学では 2 つの慣性系は、並進変換、空間回転およびガリレイ変換を組み合わせた座標変換で関係付いている。時間に関しては定数だけシフトする不定性が残っている。

Newton 力学は長い間物理の基本法則として君臨し続けたが、やがて電磁気学の基本方程式である Maxwell 方程式は力学の慣性系の間では必ずしも不変でないことが明らかになった。例えば、Maxwell 方程式を変形すると真空中を伝播する電磁波の波動方程式が導かれるが、この方程式はガリレイ変換で不変ではない。では Maxwell 方程式を不変にする

慣性系は何なのか？この疑問に答えたのが、1905年に Einstein が発表した特殊相対性理論である。特殊相対性理論が提示する慣性系間の座標変換は以下のようなものである。

$$y^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (2)$$

ただしここで新たに時間方向の座標  $y^0 = ct'$  および  $x^0 = ct$  をそれぞれ導入した。 $c$  は光速で、 $t'$  および  $t$  はそれぞれの座標系の時間であり、 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  である。この  $4 \times 4$  行列  $\Lambda$  は既に Lorentz が提唱していたので Lorentz 変換と呼ばれるが、変換の本質は Einstein によって明らかになったと言える。特に Lorentz 変換の下で光速は不変である。なお、(2) に並進変換を含めた

$$y^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (3)$$

を Poincare 変換と呼ぶ。

上式 (2) が規定する慣性系は時間に関しても変換するので、私たちの経験則とはかけ離れた現象を予言することになる。例えば、ある座標系で同じ長さの棒を 2 本用意し、片方の棒を一定の速度で動かしたときにその棒の長さが縮んで見える「Lorentz 収縮」の現象がある。また別の例としては、双子の姉と妹がいて、姉が一定速度で宇宙旅行をして折り返して地球に帰ってくると、妹の方が年を取っているという「双子のパラドクス」の現象が有名である。

特殊相対性理論を確立した後、Einstein はさらに座標系の考察を進めて、局所的な重力の力は適当な加速度系に移ることで消滅させることができることに気が付いた。例えば地上で感じる一様重力  $g$  は、下方向に加速度  $g$  で加速しているエレベーターに乗っている人にとっては完全に消滅している。つまり、無重力状態になっている。このような加速度系と重力場の等価性を「等価原理」と呼び、この原理を基に構築されたのが一般相対性理論である。従って、一般相対性理論は重力を記述する理論であり、宇宙やブラックホールなどを研究する上では欠かせない道具となっている。一般相対性理論では、重力が異なる地点での時間の進み方は異なることが知られている。これは実際に検証されており、例えば GPS で地表の位置を特定する際には、地表と人工衛星での時間のずれを考慮してはじめて精密な測定が可能となっている。

この講義の前半では、Lorentz 変換 (2) の具体的な表示と導出について、電磁気学を基に解説する。Lorentz 変換には光速  $c$  が入っているのだが、系の速度を  $c$  に比べて十分小さくとった極限では、Newton 力学の慣性系間の変換 (1) が現れることを確認する。特殊相対論に基づく力学も解説し、質量  $m$  の粒子が運動量  $\vec{p}$  を持っている時の粒子のエネルギー  $E$  が

$$E = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (4)$$

となることを、解析力学を使って導出する。 $mc^2$  は粒子の静止エネルギーと呼ばれる。後半は一般相対性理論の導入を行い、宇宙論やブラックホールなどの話題を概観する。この講義ノートは補助資料であり、講義の大筋を理解するために活用して欲しい。

問 1.  $|\vec{p}|c \ll mc^2$  のとき、式 (4) を  $|\vec{p}|^2$  の項まで近似せよ。

問 2. 32 型液晶テレビは 1 時間あたりおよそ 150Wh のエネルギーを消費する。150Wh を静止エネルギーで換算したとき、質量はいくらになるかを述べよ。

## 2 Newton 力学の対称性

2次元空間  $(x^1, x^2)$  を運動する質量  $m$  の質点を考える。基準点からの距離を  $x$  とし、ポテンシャルエネルギーは  $x$  の関数として  $V(x)$  と与えられるとする。このとき質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \end{pmatrix} V(x), \quad (5)$$

のように与えられる。ここで  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  ( $i = 1, 2$ ) であり、 $\partial^i = \delta^{ij} \partial_j = \partial_i$  である。記法については下の方でもう少し説明を与えるので、そちらを参照のこと。

この方程式が持つ対称性について考察しよう。まず座標を定数だけずらす変換

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \partial'_1 \\ \partial'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

を考えると、式 (5) は新しい座標系  $x'^i$  の言葉で

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial'^1 \\ \partial'^2 \end{pmatrix} V(x'), \quad (7)$$

のように書き表される。ただし基準点も変換されると考えているので、 $V(x') = V(x)$  とした。式の形は不変であり、これを並進変換に対する不変性と呼ぶ。

次に速度を定数だけずらす変換

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} t, \quad \begin{pmatrix} \partial'_1 \\ \partial'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

を考えると、式 (5) の形は新しい座標系  $x'^i$  でも変わらない。これを Galilei 変換に対する不変性と呼ぶ。

最後に空間回転に関する変換

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \partial'_1 \\ \partial'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

を考えると、式 (5) の形は新しい座標系  $x'^i$  でも変わらない。これを回転対称性と呼ぶ。

以上をまとめると、運動方程式 (5) は座標変換

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

の下で不変であることが示された。なお、これ以外には時間を定数だけシフトする時間並進の対称性がある。さらに、時間反転や空間反転といった離散的な対称性もある。

これまでは2次元空間で話を進めてきたが、3次元空間への拡張は容易にできる。空間  $(x^1, x^2, x^3)$  を運動する質量  $m$  の質点を考える。ポテンシャルエネルギーを  $V(x)$  とすると、質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial^i V, \quad (11)$$

のように与えられる。ここで  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) であり、 $\partial^i = \delta^{ij}\partial_j = \partial_i$  である。この方程式は

$$x'^i = R^i_j x^j + v^i t + a^i, \quad \partial'_i = R_i^j \partial_j, \quad (12)$$

のような変換の下で不変である。運動方程式は時間並進でも不変であり、さらに時間反転、空間反転といった離散的変換の下でも不変である。

[記法について]

相対論や素粒子論では時間や空間を表す添え字を文字の右上や右下に書く。そして、上と下に同じ添え字がある場合は縮約記号を使っているものとする。(縮約の添え字は重複しないように注意する。)

ここでは空間の添え字  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) について、どのようなルールになっているかを説明する。まず位置の微小量については  $dx^i$  のように添え字を上付きに書く。これを反変ベクトルと呼ぶ。次にクロネッカーのデルタ  $\delta_{ij}$  を使って下付き添え字の量  $dx_i \equiv \delta_{ij} dx^j$  を定義する。これを共変ベクトルと呼ぶ。クロネッカーのデルタ  $\delta^{ij}$  を使って、 $dx^i = \delta^{ij} dx_j$  のように共変ベクトルを反変ベクトルにすることも矛盾なくできる。

共変ベクトルと反変ベクトルは空間回転  $R$  ( $R^T R = 1$ ) に関して次のように変換するベクトルとして理解してもよい。

$$dx'^i = R^i_j dx^j, \quad (13)$$

$$dx'_i = \delta_{ij} dx'^j = \delta_{ij} R^j_k dx^k = \delta_{ij} R^j_k \delta^{kl} dx_l = R_i^l dx_l = (R^T)^j_i dx_j. \quad (14)$$

この記法により、縮約をとった量は  $dx'_i dx'^i = dx_j (R^T)^j_i R^i_k dx^k = dx_i dx^i$  となって、空間回転で不変であることが明瞭となる。

偏微分についても計算すると、空間回転で以下のように変換することが示せる。

$$\partial'^i = R^i_j \partial^j, \quad (15)$$

$$\partial'_i = (R^T)^j_i \partial_j. \quad (16)$$

従って、 $\partial^i$  は反変ベクトルで、 $\partial_i$  は共変ベクトルであることが分かる。

問 3. 2次元および3次元の場合の空間回転、並進変換、Galilei 変換の自由度 (パラメータの数) を答えよ。

問 4. ラグランジアンが

$$L[x] = \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}^i - V(x), \quad (17)$$

のように与えられたとする。空間回転、並進変換、Galilei 変換の下で新たな座標  $x'^i$  に移ったときに  $L[x'] = L[x]$  であることを示せ。ただし  $V(x)$  は位置  $x^i$  と基準点の間の距離にのみ依存するとして、 $V(x') = V(x)$  を満たすとする。

### 3 3次元空間の記法について

前節で記法について説明したが、それではよく分からない人はこの節を読むことをお勧めする。また、より一般的なテンソルについても解説を行う。

#### 3.1 ベクトル

3次元空間の座標を  $(x^1, x^2, x^3)$  のように表し、この座標を適当に回転させて得られる新たな座標を  $(x'^1, x'^2, x'^3)$  とする。回転は  $3 \times 3$  行列で表されるので、その行列を  $R$  と書くと、座標変換の式は

$$x'^i = R^i_j x^j = R^i_1 x^1 + R^i_2 x^2 + R^i_3 x^3, \quad (18)$$

のように表される。この式で  $i, j$  は  $1, 2, 3$  の値を取り、 $j$  については和記号を省略している。以後  $j$  のように、上付き添え字と下付き添え字で2度現れる添え字については、特に断らない限り和を取るものとする。例えば  $(x^1, x^2, x^3)$  の内積は、クロネッカーのデルタを用いて

$$\delta_{ij} x^i x^j = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad (19)$$

のように表される。さらに  $x_i \equiv \delta_{ij} x^j$  と定義すると、内積は

$$\delta_{ij} x^i x^j = x^i x_i, \quad (20)$$

のように記述することもできる。また  $x^i = \delta^{ij} x_j$  と書くことができる。以後、添え字の上げ下げはクロネッカーのデルタ  $\delta^{ij}, \delta_{ij}$  を用いて行う。

内積は空間回転の下で不変なので、

$$\delta_{ij} x'^i x'^j = (\delta_{ij} R^i_k R^j_l) x^k x^l = \delta_{kl} x^k x^l, \quad (21)$$

となり、これを満たすためには  $R$  が

$$R_{jk} R^j_l = \delta_{kl} \quad (R^T R = \mathbf{1}), \quad R^j_l R^{il} = \delta^{ij} \quad (R R^T = \mathbf{1}), \quad (22)$$

を満たせばよい。なお、これより  $\det R = \pm 1$  となることが分かるが、単に空間回転と言うときは  $\det R = 1$  を指す。

まとめると、ベクトルとは関係式 (22) を満たす空間回転の下で

$$x'^i = R^i_j x^j, \quad (23)$$

$$x'_i = R_i^j x_j, \quad (24)$$

のように変換するものである。特に (23) のように変換するものを反変ベクトル、(24) のように変換するものを共変ベクトルと呼ぶ。共変ベクトルの変換は  $R_i^j = (R^T)^j_i$  と転置行列を使って記述してもよい。

この講義では偏微分の記号を

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (25)$$

のように書く。偏微分の空間回転の下での変換は  $x'^i R_i^j = x^j$  に注意すると

$$\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = R_i^j \partial_j, \quad (26)$$

となるので、添え字が下付きの共変ベクトルと同じ変換であることが分かる。また偏微分の添え字をクロネッカーのデルタで  $\partial^i \equiv \delta^{ij} \partial_j$  のように上げることも問題なくできる。

$$\partial^i = \delta^{ij} \partial'_j = \delta^{ij} R_j^k \partial_k = R^i_j \partial^j. \quad (27)$$

このように偏微分記号の添え字の位置には意味があって、回転変換の下で上付きは反変ベクトル、下付きは共変ベクトルのように振る舞う。また、縮約していない添え字の位置は式変形で変わらない。例えば、上式では  $i$  は常に上にある。

### 3.2 テンソル

一般のテンソル  $T^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n}$  とは空間回転の下で

$$T^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} = R^{i_1}_{k_1} \dots R^{i_m}_{k_m} R_{j_1}^{l_1} \dots R_{j_n}^{l_n} T^{k_1 \dots k_m}_{l_1 \dots l_n}, \quad (28)$$

のように変換するものである。上付き添え字が  $m$  個、下付き添え字が  $n$  個なので、より明確に  $(m, n)$  テンソルと呼んだりもする。

特に (22) より

$$\delta'^{ij} = R^i_k R^j_l \delta^{kl} = \delta^{ij}, \quad (29)$$

なので、クロネッカーデルタは空間回転に対して不変なテンソルである。さらに、完全反対称テンソル  $\epsilon^{ijk}$  も

$$\epsilon'^{ijk} = R^i_l R^j_m R^k_n \epsilon^{lmn} = \det R \epsilon^{ijk} = \epsilon^{ijk}, \quad (30)$$

なので不変テンソルである。なお完全反対称テンソルとは、添え字の入れ替えについて完全反対称  $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{kji} = -\epsilon^{ikj}$  で、 $1, 0, -1$  の何れかの値を取るテンソルである。具体的には

$$\epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{312} = 1, \quad \epsilon^{213} = \epsilon^{132} = \epsilon^{321} = -1, \quad (31)$$

で他は 0 となる。

### 3.3 ベクトル解析の記法

ベクトル解析の記法をこれまでの記法で記述しておく。

$$\operatorname{div} \vec{V} = \partial_i V^i, \quad (32)$$

$$\vec{W} \cdot \vec{V} = W_i V^i, \quad (33)$$

$$(\operatorname{grad} \phi)_i = \partial_i \phi, \quad (34)$$

$$(\operatorname{rot} \vec{V})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j V_k, \quad (35)$$

$$(\vec{V} \times \vec{W})^i = \epsilon^{ijk} V_j W_k. \quad (36)$$

問題 5. 以下の等式を理解せよ。

1.  $\delta^{ij}\delta_{jk} = \delta_k^i$ .  $\delta_j^i\delta^{kl}T^{jml}_n = T^{imk}_n$ .  $\delta_j^i\delta^{kl}\delta_{pm}T^{jml}_n = T^i{}^k{}_p{}_n$ .
2.  $\epsilon^{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_m^i\delta_n^j - \delta_n^i\delta_m^j$ .  $\frac{1}{2!}\epsilon^{ijk}\epsilon_{mjk} = \delta_m^i$ .  $\frac{1}{3!}\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 1$ .
3.  $\epsilon^{ijk}V_jV_k = 0$ . ( $\vec{V} \times \vec{V} = 0$ .)
4.  $\text{div grad}\phi = \partial^i\partial_i\phi$ .
5.  $\text{div rot}\vec{V} = \partial_i(\epsilon^{ijk}\partial_jV_k) = 0$ .
6.  $\epsilon^{ijk}(\epsilon_{jmn}V^mW^n)X_k = (V^kX_k)W^i - (W^kX_k)V^i$ .  
 $((\vec{V} \times \vec{W}) \times \vec{X} = (\vec{V} \cdot \vec{X})\vec{W} - (\vec{W} \cdot \vec{X})\vec{V}.)$

## 4 Maxwell 方程式と対称性

### 4.1 Maxwell 方程式と電磁波

電磁場の古典的な性質は Maxwell 方程式

$$\text{div}\vec{D} = \rho, \quad (37)$$

$$\text{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (38)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad (39)$$

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (40)$$

によって記述される。特に以下では真空中を考えることにするが、その場合  $\rho = 0$ 、 $\vec{j} = 0$  であり、 $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ 、 $\vec{H} = \mu_0^{-1}\vec{B}$ 、 $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$  である。真空中の場合に Maxwell 方程式を成分を使って書き下すと、

$$\partial_i E^i = 0, \quad (41)$$

$$\epsilon^{ijk}\partial_j B_k - \frac{1}{c^2}\partial_t E^i = 0, \quad (42)$$

$$\partial_i B^i = 0, \quad (43)$$

$$\epsilon^{ijk}\partial_j E_k + \partial_t B^i = 0, \quad (44)$$

となる。ここで  $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$  である。 $\epsilon^{ijk}$  は完全反対称テンソルであり、回転変換に対して不変である。

次に Maxwell 方程式をベクトルポテンシャルを導入して変形していく。式 (43) と (44) は真空中でなくとも常に成り立つ式なので、これらを書き換えることを考える。まず式 (43) は  $B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k$  のようにベクトルポテンシャル  $A_k$  を導入することで満たすことができる。これを式 (44) に代入すると、 $E_k = \partial_k\phi - \partial_t A_k$  とすればよいことが分かる。こ

ここで新たな場  $\phi$  を導入した。まとめると、式 (43) と (44) はベクトルポテンシャル  $(\phi, A_i)$  を使って

$$B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k, \quad (45)$$

$$E_i = \partial_i \phi - \partial_t A_i, \quad (46)$$

と変形することができる。ここで  $(\phi, A_i)$  には、 $(\phi', A'_i) = (\phi + \partial_t \chi, A_i + \partial_i \chi)$  のように、任意関数  $\chi(t, x)$  だけずらす不定性があることに注意しておく。これはゲージ対称性と呼ばれる局所的な変換で、素粒子物理では物理法則を求める上で重要な役割を果たす。ベクトルポテンシャル  $(\phi, A_i)$  はゲージポテンシャルとも呼ばれる。

式 (45) と (46) を式 (41) と (42) に代入すると

$$\partial_i \partial^i \phi - \partial_t \partial_i A^i = 0, \quad (47)$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t - \partial_j \partial^j \right) A^i + \partial^i \left( -\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \partial_j A^j \right) = 0, \quad (48)$$

が得られる。ここで前節の問題 5.2 の等式を使った。さらに、先ほど述べたゲージ変換の自由度を使って、

$$-\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \partial_j A^j = 0, \quad (49)$$

となるようにすることができる。これを Lorentz ゲージと呼ぶ。Lorentz ゲージ (49) の下では式 (47) と (48) は

$$\left( -\frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t + \partial_j \partial^j \right) \phi = 0, \quad (50)$$

$$\left( -\frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t + \partial_j \partial^j \right) A^i = 0, \quad (51)$$

となる。以上により Lorentz ゲージ (49) の下では Maxwell 方程式は、式 (45)、(46)、(50) および (51) で与えられることになる。

以下では Maxwell 方程式の解として電磁波があることをみていく。式 (50) および (51) は波動方程式なので、振動数を  $\nu$  とし、波の進行方向の単位ベクトルを  $n^i$  とすると、それらの解は

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} e^{\frac{2\pi i \nu}{c}(ct - n_k x^k)} + \bar{\phi}^* e^{-\frac{2\pi i \nu}{c}(ct - n_k x^k)}, \\ A^i &= \bar{A}^i e^{\frac{2\pi i \nu}{c}(ct - n_k x^k)} + \bar{A}^{i*} e^{-\frac{2\pi i \nu}{c}(ct - n_k x^k)}, \end{aligned} \quad (52)$$

となる。これらを Lorentz ゲージ (49) に代入すると、

$$\bar{\phi} = -c n_k \bar{A}^k. \quad (53)$$

従って、電磁波を表す電磁場は

$$\begin{aligned} B^i &= -\frac{2\pi i \nu}{c} \epsilon^{ijk} n_j \bar{A}_k e^{\frac{2\pi i \nu}{c} i(ct - n_l x^l)} + \frac{2\pi i \nu}{c} \epsilon^{ijk} n_j \bar{A}_k^* e^{-\frac{2\pi i \nu}{c} i(ct - n_l x^l)}, \\ E_i &= -\frac{2\pi i \nu}{c} (\bar{\phi} n_i + c \bar{A}_i) e^{\frac{2\pi i \nu}{c}(ct - n_k x^k)} + \frac{2\pi i \nu}{c} (\bar{\phi}^* n_i + c \bar{A}_i^*) e^{-\frac{2\pi i \nu}{c}(ct - n_k x^k)}, \end{aligned} \quad (54)$$

のようになり、電磁波は光速  $c$  で  $n^i$  方向に伝播する。またこの式より、 $E^i n_i = 0$ 、 $B_i n^i = 0$  および  $E_i B^i = 0$  が成り立つことが分かるので、電磁波の電場および磁場は進行方向に垂直な平面で振動し、電場と磁場の振動は直交しており、自由度 2 の横波であることが分かる。可視光は電磁波のうち、振動数がおよそ 350THz から 750THz のものである。(1THz=10<sup>12</sup>Hz。)

## 4.2 Maxwell 方程式の対称性

式 (50) および (51) を不変にするような座標変換について考えてみよう。仮にある座標変換  $(t, x^i) \rightarrow (t', x'^i)$  があって、式 (50) および (51) が

$$\left( -\frac{1}{c^2} \partial'_t \partial'_t + \partial'_j \partial'^j \right) \phi' = 0, \quad (55)$$

$$\left( -\frac{1}{c^2} \partial'_t \partial'_t + \partial'_j \partial'^j \right) A'^i = 0, \quad (56)$$

のように不変な形に書けたとする。Lorentz ゲージの式も不変であるとする。前節の議論を繰り返すことで新たな座標系でも光速  $c$  で伝播する電磁波が存在することになる。あるいは逆の言い方をすると、もし光速の大きさが座標系によらず一定であるならば、座標変換の式は式 (55) および (56) を満たすように与えなければならない。

では光速の大きさは座標変換で不変なのか？これは実際に観測によって検証できる問題であり、答えは Yes である。従って、電磁気学の対称性は光速を不変にするようなものである必要がある。そのような座標変換は Lorentz 変換と呼ばれるもので与えられ、時間と空間を対等に扱うような変換となっている。

Lorentz 変換の具体的な形は後で考えることにして、ひとまずここでは Galilei 変換による座標変換が式 (55) および (56) を満たさないことを以下でみてみよう。それにはダランベルシアン (d' Alembertian) と呼ばれる演算子

$$\square = -\frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t + \partial_j \partial^j, \quad (57)$$

の変換を調べればよい。Galilei 変換は

$$t' = t, \quad x'^i = x^i - v^i t, \quad (58)$$

で与えられるので、

$$\begin{aligned} \partial_t &= \frac{\partial t'}{\partial t} \partial'_t + \frac{\partial x'^i}{\partial t} \partial'_i = \partial'_t - v^i \partial'_i, \\ \partial_i &= \frac{\partial t'}{\partial x^i} \partial'_t + \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \partial'_j = \partial'_i, \end{aligned} \quad (59)$$

となる。これよりダランベルシアンの変換は

$$\begin{aligned} \square &= -\frac{1}{c^2} (\partial'_t - v^i \partial'_i)^2 + \partial'_j \partial'^j \\ &= \square' - \frac{1}{c^2} (-2v^i \partial'_t \partial'_i + v^i v^j \partial'_i \partial'_j), \end{aligned} \quad (60)$$

なので、Galilei 変換の下で不変ではないことが分かる。Galilei 変換は光速を一定にしない変換なので、これは当然の結果である。なお、回転変換に関してはダランベルシアンは不変である。実際、回転変換は

$$t' = t, \quad x'^i = R^i_j x^j, \quad \partial'^i = R^i_j \partial^j, \quad (61)$$

で与えられるので、ダランベルシアンの変換は

$$\square = -\frac{1}{c^2} \partial_t'^2 + \partial_j' \partial'^j = \square', \quad (62)$$

であり、回転変換で不変となることが分かる。

このように光速が不変であれば、Galilei 変換は電磁波の方程式の対称性ではなく、一方回転変換は方程式の対称性であることが分かった。次節では光速の大きさが慣性系によらず一定であることがどのように検証されたかを説明し、その後で回転変換を拡張した Lorentz 変換について解説する。

問題 6.  $x^0 = ct$ 、 $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}$ 、 $A_0 = \frac{1}{c}\phi$  として、式 (46)、(49)、(50) および (51) を書きなおせ。

問題 7.  $E^i n_i = 0$ 、 $B_i n^i = 0$  および  $E_i B^i = 0$  を示せ。

## 5 光の速さ (光速 $c$ ) の測定について

前節で述べたように光は電磁波であり、波動方程式に従って伝播する。一方で光電効果にみられるように、粒子としての性質も備えている。この光の 2 重性は、人々が 20 世紀前半に量子力学を構築する際に重要な役割を果たした。

光が波としての性質を示したり、粒子としての性質を示すことは Newton の時代から議論されてきたことであるが、一方で光速  $c$  を測定する研究も色々行われてきた。この節では光速の測定の歴史を概観し、光速が慣性系によらず一定であることを検証した Michelson-Morley の実験について説明する。

### 5.1 光速の測定の歴史

光速を測定するには、光が移動した距離をかかった時間で割ればよい。従って、光速の測定では移動距離とかかった時間を精密に測定することが重要となる。

Galilei は、ある山頂から距離  $\Delta L$  だけ離れた別の山頂に向けて光を発射し、その光が往復してくる時間  $\Delta t$  を測定することで光速を測定しようと試みた。ただしこの測定は失敗に終わる。 $c \sim 3 \times 10^8$  m/s であることが分かっていたら失敗した理由は明らかで、仮に  $\Delta L = 1.5 \times 10^4$  m とすると、 $\Delta t \sim 10^{-4}$  s となることが期待される。この時間間隔を人間の能力で見極めることは不可能である。

1675 年、Romer は木星の衛星イオが食を起こす周期の変動を解析して、光速を導き出すことに初めて成功した。衛星イオは Galilei によって発見された衛星で、木星の周りを公転周期およそ 1.8 日で公転している。(図 1 参照。) しかし、地球でその食の周期を観測す



図 1: 木星とその衛星イオ (<http://www.nasa.gov/>より)

ると、少しずつ変動していくことが知られていた。Romer はイオの周期変動は、光がイオから地球に到達するまでの距離が少しずつ変動するからだと考えた。Romer の光速測定のポイントは以下の通りである。まず観測 0 日目において、地球、木星と太陽の位置関係が図 2 左のようであったとする。すると、観測 180 日後にはおよそ図 2 右のようになる<sup>1</sup>。ここで 180 回目のイオの食を観測すると、それは観測 0 日目から数えて  $(180 \text{ 日} - \Delta t \text{ 秒})$  の後であった。Romer はこの  $\Delta t$  秒のずれは、180 日の間に地球が木星の近い側に移動したことで光の移動距離が  $3.0 \times 10^{11} \text{ m}$  だけ短くなったことによるものと考えた。現在の観測では  $\Delta t \sim 10^3 \text{ s}$  なので、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$  が得られる。当時 Romer が得た値は  $2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$  というものであったが、光速が有限であることを確認し、かつイオの食の周期変動を論理的に説明した優れた業績だと言える。

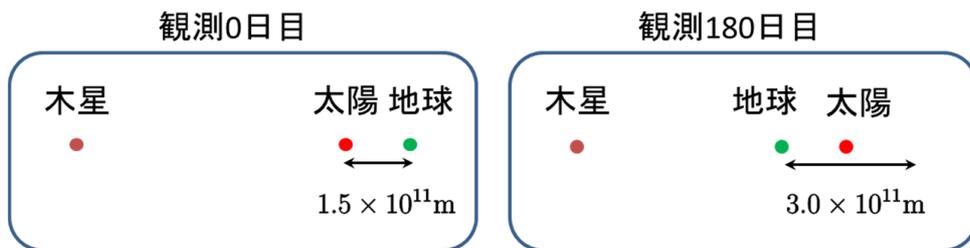


図 2: イオの食の周期変化による光速の測定

1727 年、Bradley は光行差の現象を利用して光速を測定することに成功した。光行差の現象とは、地球から恒星を観測したときに地球の公転運動のために、恒星の位置が周期運動をして見える現象のことである。例えば、雨粒が空から地面に垂直に降っている状況を考える。ここで地表で傘を持って等速円運動をしたとすると、雨に濡れないようにするためには傘の向きを常に進行方向に傾けなければいけない。同じように、恒星から出た光が地球の公転軌道面に垂直に降り注ぐ状況を考える。ここで地球は公転運動をしているので、

<sup>1</sup>木星の公転周期はおよそ 12 年なのでここでは無視することにする。

望遠鏡で光をとらえるには常に地球の進行方向に傾けなければいけない。ただ、観測者は地球の公転に気が付かないので、恒星が周期運動をしているように観測するのである。望遠鏡の傾き  $\Delta\theta$  と地球の公転速度  $V$  が分かれば、光速は  $c = V / \tan \Delta\theta$  のように求めることができる。  $V = \frac{2\pi \times 1.5 \times 10^{11}}{365 \times 24 \times 3600}$  m/s であり、Bradley は観測の結果  $\Delta\theta = 20'' = \frac{20}{3600} \times \frac{2\pi}{360}$  rad を得たので、  $c \sim V / \Delta\theta = 3.1 \times 10^8$  m/s なる値を得る。

1849年、Fizeau は回転歯車を利用した実験で、地上で光速を測定することに初めて成功した。Fizeau は、図3のように回転歯車に向かって光を入射する実験を行った。歯車が凸のときには光は通過せず、凹のときには通過するように設定してあるとする。歯車の回転速度が十分遅い場合には、歯車の凹を通過した光は反射鏡で反射して、歯車の同じ凹を通過して観測者に到達する。ここで歯車の回転速度を上げていったとき、歯車の凹を通過した光が反射鏡で反射して歯車に戻ってくる間に、歯車が隣の凸まで回転していれば光は観測者に到達しない。さらに回転速度を上げると、歯車の凹を通過した光が反射鏡で反射して歯車に戻ってくる間に、歯車が次の凹のまで回転していれば光は観測される。このときの回転歯車の回転速度は測定可能であり、歯車の凹の部分の1つだけずれる時間間隔  $\Delta t$  を求めることができる。これより光速は  $c = 2\Delta L / \Delta t$  のように求めることができる。Fizeau の実験では  $c \sim 3.15 \times 10^8$  m/s なる値が得られたそうである。

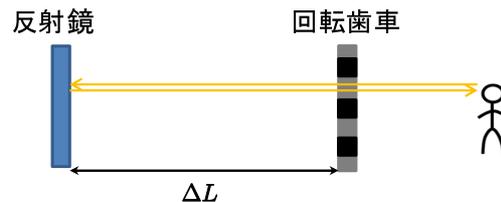


図 3: 回転歯車による光速の測定

1850年、Foucault は回転鏡を利用した実験で、光速を測定することに成功した。図4のように、回転鏡に向かって光を入射し反射鏡を経て光が戻ってきたときに、入射と反射の角度のずれ  $2\Delta\theta$  を測定できる。回転鏡の角速度を  $\omega$  とすると、光速は  $c = 2\Delta L / (\Delta\theta / \omega)$  となり、Foucault は  $c \sim 2.98 \times 10^8$  m/s なる値を得た。

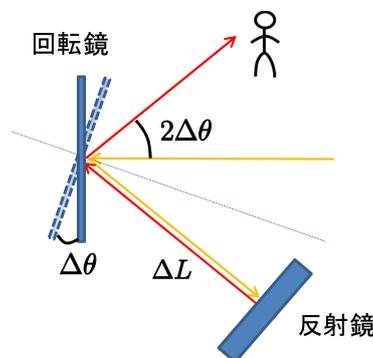


図 4: 回転鏡による光速の測定

現代の物理学では光速は  $c = 2.99792458 \times 10^8$  m/s と定義されている。これはレーザー干渉の実験で光速測定の精度が高くなり、1 m の定義に関する不確定性の方が大きくなってしまったためである。光速の値を厳密に与えることで、逆に 1 m は光が  $\frac{1}{299792458}$  s の間に進む距離として与えられることになった。

## 5.2 Michelson-Morley の実験

19 世紀後半になって電磁波の存在が明らかになると、人々は電磁波を伝える媒質があると考えようになり、これをエーテルと呼んでいた。エーテルが存在して、静止したエーテルの中を電磁波が光速  $c$  で伝播すると仮定する。さらに地球がエーテルに対して相対速度  $v$  で移動していれば、Galilei 変換により光速の値は  $v$  に依存するであろう。1887 年に Michelson と Morley は光速測定の実験を行い、エーテルと Galilei 変換を仮定して得られる理論と実験値には矛盾があることを発表した。これによってエーテルの存在は否定され、電磁波はどの慣性系においても真空中を光速  $c$  で伝播することが確立する。

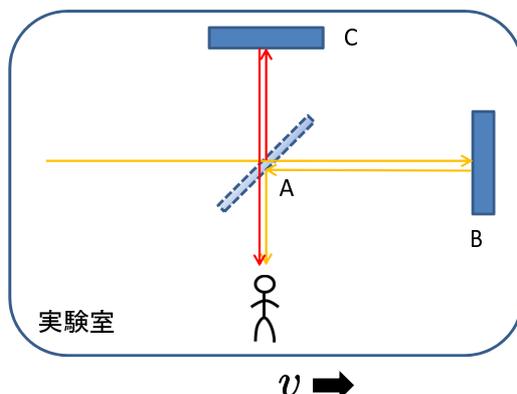


図 5: Michelson-Morley の実験

それでは Michelson-Morley の実験について説明しよう。まず図 5 のようにハーフミラー A、反射鏡 B、C を設置した実験室を用意する。実験室は静止エーテルに対して速度  $v$  で  $A \rightarrow B$  の方向に移動していると考えよう。ハーフミラー A に入射した電磁波は、 $A \rightarrow B \rightarrow A$  という経路を辿るか、 $A \rightarrow C \rightarrow A$  という経路を辿って観測者まで到達する。このとき 2 つの経路の差によって、観測者は干渉縞を観測することができる。

電磁波の伝搬を、静止エーテルとともに静止している座標系において考察する。電磁波が経路  $A \rightarrow B \rightarrow A$  を移動するのにかかる時間を  $T_{ABA}$  とすると、

$$T_{ABA} = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2cl_1}{c^2 - v^2}, \quad (63)$$

である。この式の導出は静止エーテルの系で考えているが、実験室の観測者にとっても光速は Galilei 変換により  $A \rightarrow B$  間で  $c-v$ 、 $B \rightarrow A$  間で  $c+v$  になるので、同じ結果が得ら

れる。一方、電磁波が経路  $A \rightarrow C \rightarrow A$  を移動するのにかかる時間を  $T_{ACA}$  とすると、

$$T_{ACA} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad (64)$$

である。従って、2つの経路の時間差  $\Delta T$  と光路差  $\Delta L$  は

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_{ABA} - T_{ACA} = \frac{2cl_1}{c^2 - v^2} - \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \\ \Delta L &= c\Delta T = \frac{2l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (65)$$

となる。この光路差に応じて実験室の観測者は干渉縞を観測することになる。

次に実験室を時計回りに  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転する。これは実験室が静止エーテルに対して速度  $v$  で  $A \rightarrow C$  の方向に移動していると考えられることができる。電磁波が経路  $A \rightarrow B \rightarrow A$  を移動するのにかかる時間を  $T'_{ABA}$  とすると、

$$T'_{ABA} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad (66)$$

である。一方、電磁波が経路  $A \rightarrow C \rightarrow A$  を移動するのにかかる時間を  $T'_{ACA}$  とすると、

$$T'_{ACA} = \frac{l_2}{c - v} + \frac{l_2}{c + v} = \frac{2cl_2}{c^2 - v^2}, \quad (67)$$

である。従って、2つの経路の時間差  $\Delta T'$  と光路差  $\Delta L'$  は

$$\begin{aligned} \Delta T' &= T'_{ABA} - T'_{ACA} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{2cl_2}{c^2 - v^2}, \\ \Delta L' &= c\Delta T' = \frac{2l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2l_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \end{aligned} \quad (68)$$

となる。この光路差に応じて実験室の観測者は干渉縞を観測することになる。

地球の公転速度は  $v = 3.0 \times 10^4$  m/s なので、 $\frac{v}{c} \ll 1$  として光路差の差を近似すると

$$\Delta L - \Delta L' = 2(l_1 + l_2) \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \sim (l_1 + l_2) \frac{v^2}{c^2}, \quad (69)$$

となる。よって実験室を回転した前と後の実験では干渉縞の位置に変化が現れることが予想され、 $l_1 = l_2 = 11$  m とすると  $\Delta L - \Delta L' = 2.2 \times 10^{-7}$  m となる。光源としてナトリウム D 線 (波長  $5.9 \times 10^{-7}$  m) を用いたとすると、干渉縞の位置の移動を実験で確認できるはずだが、実際にはそのような現象は観測されなかった。これは理論計算の前提であるエーテルの存在および Galilei 変換に誤りがあることを示している。

## 6 特殊相対性原理と Lorentz 変換

### 6.1 光速不変の原理および特殊相対性原理

Michelson-Morley の実験により電磁波については、相対速度  $v$  で移動している座標の間の変換に Galilei 変換を適用すると矛盾が生じることが明らかになった。そして、Michelson-Morley の実験結果は、「あらゆる慣性系において光速は一定である」と考えれば説明でき

る。この考えは実験的に支持されているので、むしろ物理法則はこの「光速不変の原理」を基に構築されると考えるのが自然である。光速があらゆる慣性系で不変であることは、電磁気学の法則があらゆる慣性系で不変であることと等価である。このような主張を「特殊相対性原理」と呼び、現代の物理学は相対性原理を基に理論は構築されている。Galilei 変換は相対性原理を満たしていないので、電磁気学では Galilei 変換を修正した変換を探す必要がある。

## 6.2 光速不変の原理による時間と長さの相対性の考察

ある慣性系を考えたときに、その系には時間座標  $t$  と空間座標  $x^i (i = 1, 2, 3)$  が割り当てられる。そして、時間座標  $t$  は全ての空間の位置において同期化することができる。例えば、地球と木星の時計を同期化したければ、地球から時刻  $t_0$  のときに木星に向けて電波を送り、木星では電波を受信した時刻を  $t_0 + (\text{地球と木星の距離})/c$  と調節すればよい。

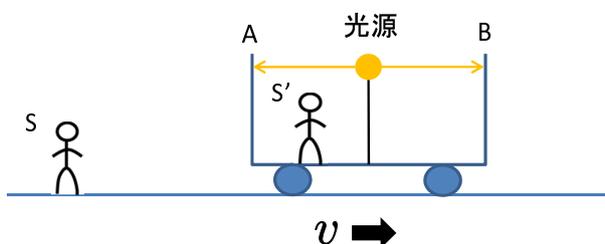


図 6: 相対速度  $v$  で移動する車の中央から光を出す。

では、まず初めに光速不変の原理を適用すると、時刻の同時性という概念が慣性系によって異なることをみていこう。図 6 のように、静止系の観測者  $S$  と速度  $v$  で移動する車中の観測者  $S'$  がいる。そしてある時刻において、車の中央にある光源から壁  $A$  と  $B$  に向かって光を出した。  $S'$  から見た車の長さを  $2\ell'$  とすると、光が壁に到達する時間はそれぞれ

$$t'_A = t'_B = \frac{\ell'}{c}, \quad (70)$$

となり、光は壁に同時に到達する。一方、  $S$  から見た車の長さを  $2\ell$  とすると、光が壁に到達する時間はそれぞれ

$$t_A = \frac{\ell}{c+v}, \quad t_B = \frac{\ell}{c-v}, \quad (71)$$

となり、光は壁に同時に到達しない。つまり  $S$  の座標系と  $S'$  の座標系では同時性の概念が異なる。

次に  $\ell$  と  $\ell'$  の関係について調べる。  $S$  から見た車長は  $2\ell$  だが、これが何らかの変換  $k(v)$  を受けて、  $v$  で移動している  $S'$  には  $2\ell'$  に見えたと考えると

$$\ell = k(v)\ell'. \quad (72)$$

次に、  $S'$  の観測者から見て光が壁  $A$  と  $B$  に同時に着いた瞬間に、壁  $A$  と  $B$  の直下の地面に印  $A'$  と  $B'$  をつける。  $S$  の観測者から見て印  $A'$  は時間  $t_A$  で、  $B'$  は  $t_B$  で地面に

つけられたように見える。S の観測者から見て印 A' と B' は静止しており、その間隔は  $2a = c(t_A + t_B) = \frac{2\ell}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  である。さて、S' から見た車長は  $2\ell'$  だが、これが何らかの変換  $k(v)$  を受けて、 $v$  で移動している S には  $2a$  に見えたと考えたと

$$\ell' = k(v)a = \ell \frac{k(v)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (73)$$

式 (72) と (73) および  $k(0) = 1$  より

$$k(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (74)$$

を得る。つまり  $\ell < \ell'$  となって、S にとって車長は縮んで見えることになる。これを Lorentz 収縮と呼ぶ。

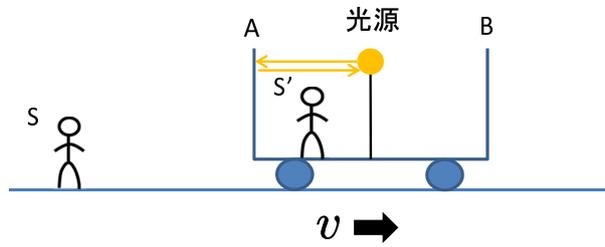


図 7: 相対速度  $v$  で移動する車の中央から光を出し、反射光が光源に戻ってくる様子。

最後に図 7 のように、車の中央にある光源から壁 A に向かって光を出し、反射した光が光源に戻ってくるまでの時間について考察しよう。これは S' の観測者にとっては

$$\Delta t' = 2t'_A = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (75)$$

であり、S の観測者にとっては

$$\Delta t = t_A + t_B = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (76)$$

となる。つまり  $\Delta t > \Delta t'$  となって、運動している時計の方が時間が進んでいない。

### 6.3 Lorentz 変換

ここではいよいよ、これまで保留にしていた光速を不変にする座標変換について考えよう。光速を不変にする変換は前にも述べたように、ダランベルシアンを不変にするような変換である。(式 (55) および (56) 参照。) ダランベルシアンは空間回転の下で不変であることは既に確認したので、空間回転を時間方向も含めて拡張することを考える。まず時間  $t$  と空間  $x^i (i = 1, 2, 3)$  の次元を合わせるために、光速  $c$  を使って  $x^0 = ct$  なる時間座標を導入しよう。以下では 4 次元時空の座標を  $x^\mu = (ct, x^i)$  で表すことにし、ギリシャ文字

$\mu = 0, 1, 2, 3$  は 4 次元時空の添字として用い、ローマ字  $i = 1, 2, 3$  は 3 次元空間の添字として用いることにする。時間方向の偏微分は  $\partial_0 = \frac{1}{c}\partial_t$  となるので、ダランベルシアンは

$$\square = -\partial_0\partial_0 + \delta^{ij}\partial_i\partial_j = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu, \quad (77)$$

と書くことができる。上下で対になっている添字  $\mu, \nu$  については縮約をとっており、 $\eta^{\mu\nu}$  は

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (78)$$

のように定義される  $4 \times 4$  行列の  $(\mu, \nu)$  成分である。

では座標変換を考えよう。座標変換を  $4 \times 4$  行列  $\Lambda$  を使って

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad \partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \partial'_\nu = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu = (\Lambda^T)_\mu^\nu \partial'_\nu, \quad (79)$$

と仮定する。 $\Lambda^T$  は  $\Lambda$  の転置行列である。そして、ダランベルシアンの不変性

$$\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \eta^{\mu\nu}\Lambda^\rho_\mu\Lambda^\sigma_\nu\partial'_\rho\partial'_\sigma = \eta^{\rho\sigma}\partial'_\rho\partial'_\sigma = \square', \quad (80)$$

を要求すると、座標変換は

$$\Lambda^\rho_\mu\eta^{\mu\nu}(\Lambda^T)_\nu^\sigma = \eta^{\rho\sigma}, \quad (81)$$

を満たすものである必要がある。行列として記述すると  $\Lambda\eta\Lambda^T = \eta$  となる。式 (81) を満たすような変換を Lorentz 変換と呼ぶ。Lorentz 変換は積について閉じている。つまり、 $\Lambda$  と  $\Lambda'$  を Lorentz 変換とすると、 $\Lambda'' = \Lambda\Lambda'$  も Lorentz 変換である。

Lorentz 変換の自由度を数えよう。まず  $\Lambda$  は  $4 \times 4$  行列なので、16 個の成分を持つ。ただしこれらは全て独立ではなく、式 (81) を満たさなければならない。式 (81) は  $\rho$  と  $\sigma$  の入れ替えで対称なので、10 個の条件式を表している。従って、 $16 - 10 = 6$  個が Lorentz 変換の自由度になる。このうち 3 個は空間回転の自由度になっており、独立な自由度として  $x^i$  軸周りの  $\theta_i$  回転

$$\Lambda_{\theta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{\theta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{\theta_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (82)$$

を選ぶと、任意の軸の周りの空間回転はこれらの行列の適当な積 (例えば Euler 表示) で書くことができる。

Lorentz 変換の残りの 3 個は、時間と空間を混ぜるような変換になっていると考えられる。そこで  $x^0$  と  $x^1$  を混ぜるような変換

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (83)$$

を考え、式 (81) に代入すると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 & -ac + bd \\ -ac + bd & -c^2 + d^2 \end{pmatrix}, \quad (84)$$

なので、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \\ \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \quad (85)$$

となることが分かる。ここでパラメータの物理的意味を明らかにするために、 $x'^1$  を書き下してみると  $x'^1 = \sinh \eta ct + \cosh \eta x^1 = \cosh \eta (x^1 + \tanh \eta ct)$  である。この変換を相対速度  $v$  で移動している座標の間の変換と考えると、 $\tanh \eta = -\frac{v}{c}$  と置くことは自然である。(  $x'^1=0$  の点は  $x^1 = vt$  で移動している。 ) これより

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \sinh \eta = \frac{-v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (86)$$

となることが分かる。 $v/c \ll 1$  のとき、この変換は Galilei 変換に近似される。

上記と同様の考察を他の軸についても行うと、結局 Lorentz 変換の残りの 3 個は

$$\Lambda_{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} & \frac{-v_1/c}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v_1/c}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} & 0 & \frac{-v_2/c}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-v_2/c}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{v_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v_3^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-v_3/c}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v_3/c}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v_3^2/c^2}} \end{pmatrix}, \quad (87)$$

となる。これらの変換は Lorentz boost と呼ばれる変換で、 $x^i$  方向に相対速度  $v_i$  で運動している座標の間の変換を表している。Newton 力学の Galilei 変換は、Lorentz boost において  $v_i/c \ll 1$  の近似を行った変換である。従って、粒子の運動が光速に近い場合には Newton 力学を相対論的に修正する必要がある。相対論的力学についてはまた後の節で取り扱うことにする。

まとめると、Lorentz 変換には 6 個の自由度があり、独立な変換として空間回転 (82) および Lorentz boost (87) を選ぶことができる。任意の Lorentz 変換はこれらの変換を適当にかけ合わせることで構成できる。

問題 8. Lorentz boost の下で  $x^1 = x^0$  の直線はどのように変換されるかを考えよ。また、6.2 節の内容を Lorentz boost を使って再考せよ。

## 7 Lorentz boost の物理的考察

ある慣性系が別の慣性系に対して相対速度  $v$  で移動しているとする。もし  $v \ll c$  であれば、慣性系間の座標変換は Galilei 変換で事足りるし、経験則から各座標系における物体の運動を予想できる。しかし  $v \sim c$  の場合は、慣性系間の座標変換は Lorentz boost を用いる必要があり、我々の経験則は有効ではない。

この節では Lorentz boost について、数式に基づいて物理的考察を行う。観測者 S の座標系を  $x^\mu$  で表し、S から見て  $x^1$  正の方向に車が速度  $v$  で移動している。車に乗っている観測者 S' の座標系を  $x'^\mu$  で表すと、座標変換は Lorentz boost で与えられ

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad (88)$$

となる。これにより座標系  $x^\mu$  の任意の点や線は、座標系  $x'^\mu$  の点や線に移される。例えば  $x^\mu = 0$  の点は  $x'^\mu = 0$  の点に移されることが分かる。以下ではこの変換によって座標系 S および S' で物理現象がどのようにみえるかを考察しよう。

問題 9. Lorentz boost (88) の逆変換を求め、その意味を考えよ。

### 7.1 Light-cone と世界距離

$x^\mu = 0$  の点からあらゆる方向に放射された電磁波について考えよう。例えば電磁波が  $x^1$  正の方向に出た場合、 $\frac{dx^1}{dx^0} = 1$  を満たす。より一般には電磁波の軌道は

$$-(dx^0)^2 + dx_i dx^i = 0, \quad (89)$$

なる式を満たす。原点を通りこの式を満たす超曲面のことを、原点  $x^\mu = 0$  を基点とした light-cone と呼ぶ。

式 (89) を S' の座標系で書き表そう。Lorentz boost (88) の逆変換は

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( x'^0 + \frac{v}{c} x'^1 \right), \\ x^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( x'^1 + \frac{v}{c} x'^0 \right), \end{aligned} \quad (90)$$

および  $x^2 = x'^2, x^3 = x'^3$  なので、

$$-(dx^0)^2 + dx_i dx^i = -(dx'^0)^2 + dx'_i dx'^i = 0, \quad (91)$$

となる。従って S における light-cone は S' でも light-cone となる。

ここで世界距離の 2 乗

$$ds^2 \equiv -(dx^0)^2 + dx_i dx^i, \quad (92)$$

を定義すると、先ほど示した通り Lorentz boost (88) の下で不変である。そして後で説明するように、世界距離は任意の Lorentz 変換の下で不変である。世界距離は 3 次元空間の距離 (3 次元空間回転で不変) を 4 次元時空のそれ (4 次元 Lorentz 変換で不変) に拡張したものである。S において  $ds^2 > 0$  であれば S' でも  $ds^2 > 0$  であり、S において  $ds^2 < 0$  であれば S' でも  $ds^2 < 0$  である。 $ds^2 > 0$  の軌道を空間的 (space like) な世界線 (world line) と呼び、 $ds^2 < 0$  の軌道を時間的 (time like) な世界線と呼ぶ。(図 8 参照。) そして、 $ds^2 = 0$  の軌道を光的な世界線と呼ぶ。光速より遅い速度で移動する物体の世界線は時間的である。

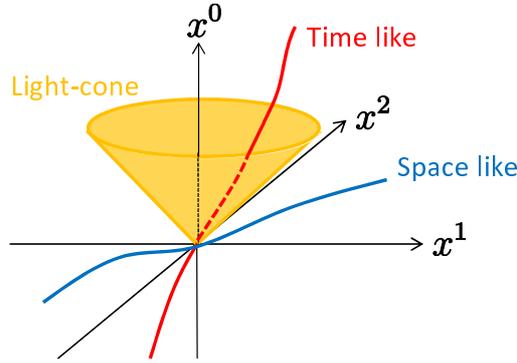


図 8: light-cone と世界線。

## 7.2 双子のパラドクス

Lorentz boost (88) は S と S' の間の相対的な変換なので、Lorentz 収縮や時間の遅れの現象には一見矛盾が生じるように思える。この手の話でよく引き合いに出されるのが双子のパラドクスである。ここでは双子のパラドクスには矛盾がないことを考察しよう。

S を地球上に静止している人の座標系とする。ここで、 $x^1$  正の方向に速度  $v$  で宇宙船が地球  $(x^0, x^1) = (0, 0)$  を出発して、時空点  $(x^0, x^1) = (\frac{cT}{2}, \frac{vT}{2})$  で折り返し、 $x^1$  負の方向に速度  $v$  で地球  $(x^0, x^1) = (cT, 0)$  まで戻ってきたとする。(図 9 参照。)

宇宙船の運動を宇宙船に乗っている人の座標系で考えよう。宇宙船が地球を出発してから折り返すまでの、宇宙船に乗っている人の座標系を S' とすると、S の座標系  $x^\mu$  と S' の座標系  $x'^\mu$  の間の座標変換は式 (88) で与えられる。S から見て  $0 \leq x^0 \leq \frac{cT}{2}$  間の宇宙船の運動は  $x^1 = \frac{v}{c}x^0$  なので、これを S' の座標系で考えると

$$x'^1 = 0, \quad (0 \leq x'^0 \leq \frac{cT}{2} \sqrt{1 - v^2/c^2}), \quad (93)$$

となる。

次に、宇宙船が折り返してから地球に戻るまでの運動において、宇宙船に乗っている人の座標系を  $S''$  とする。 $S'$  と  $S''$  は異なる慣性系であるということがポイントである。 $S$  の座標系  $x^\mu$  と  $S''$  の座標系  $x''^\mu$  の間の座標変換は

$$\begin{pmatrix} x''^0 \\ x''^1 \\ x''^2 \\ x''^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{v^2 T/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{vT}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (94)$$

であり、原点の位置は折り返し地点  $(x^0, x^1) = (\frac{cT}{2}, \frac{vT}{2})$  が  $(x''^0, x''^1) = (\frac{cT}{2}\sqrt{1-v^2/c^2}, 0)$  に対応するように選んだ。 $S$  から見て時刻  $\frac{cT}{2} \leq x^0 \leq cT$  間の宇宙船の運動は  $x^1 = -\frac{v}{c}x^0 + vT$  なので、これを  $S''$  の座標系で考えると

$$x''^1 = 0, \quad (\frac{cT}{2}\sqrt{1-v^2/c^2} \leq x''^0 \leq cT\sqrt{1-v^2/c^2}), \quad (95)$$

となる。

以上により地球上の人にとっては時間  $\Delta t = T$  だけ経過したのに対し、宇宙船に乗っている人にとっては時間  $\Delta t' = \sqrt{1-v^2/c^2}T$  だけ経過したことになる。 $\Delta t' < \Delta t$  なので、地球にいた人の方が年をとっている。

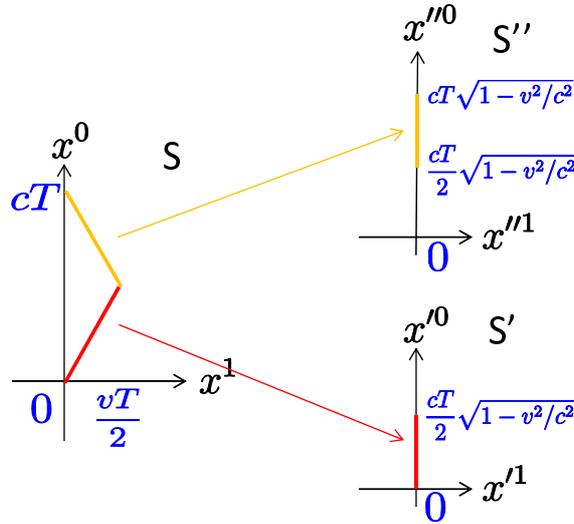


図 9: 双子のパラドクス。

これがパラドクスと言われるのは、宇宙船に乗っている人から見ると地球が速度  $v$  で運動しているように見えるので、逆の結論も一見ありえそうに思えるからである。しかしながら、地球の人は一つの慣性系  $S$  に留まり続けているのに対し、宇宙船の人は折り返し点で慣性系を  $S'$  から  $S''$  に変えている。 $S'$  で静止し続けている物体は  $S''$  では等速運動をしているように見える。従って宇宙船に静止し続けている慣性系を取ることはできないのである。

問題 10. S' と S'' の間の Lorentz 変換を求めよ。

### 7.3 固有時間と Minkowski の不等式

図 9 の S の座標系において時空点  $(0, 0)$  と時空点  $(cT, 0)$  の間の世界距離は  $ds^2 = -c^2T^2$  なので、 $T = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$  と表される。これは S の座標系で静止している観測者が腕時計で測る時間と一致している。また、時空点  $(0, 0)$  と時空点  $(\frac{cT}{2}, \frac{vT}{2})$  の間の世界距離は  $ds^2 = -\frac{c^2T^2}{4} + \frac{v^2T^2}{4}$  であり、 $\frac{T}{2}\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$  と表される。これは S' の座標系で静止している観測者が腕時計で測る時間と一致している。同様に、時空点  $(\frac{cT}{2}, \frac{vT}{2})$  と時空点  $(cT, 0)$  の間の世界距離は  $ds^2 = -\frac{c^2T^2}{4} + \frac{v^2T^2}{4}$  であり、 $\frac{T}{2}\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$  と表される。これは S'' の座標系で静止している観測者が腕時計で測る時間と一致している。

一般に時空点 A から時空点 B への世界線が時間的 ( $ds^2 < 0$ ) であるときに、A と B の間の世界距離を使って

$$d\tau \equiv \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}, \quad (96)$$

のように定義される Lorentz 不変量を固有時間と呼ぶ。固有時間には A から B へ移動する観測者の腕時計で測る時間という物理的意味がある。何故ならば、A から B へ移動する観測者の座標系を  $x^\mu$  とすると、この座標系では A と B は空間的には同じ位置にあり  $ds^2 = -(dx^0)^2$  となるからである。

式 (92) によって距離が与えられる時空を Minkowski 時空と呼ぶ。Minkowski 時空において、時空点 A、B、C の時間順序が A、B、C の順であるとする。時空点 A から時空点 B への世界線は時間的であるとしその 4 元ベクトルを  $a^\mu$  で表すことにする。さらに、時空点 B から時空点 C への世界線は時間的であるとしその 4 元ベクトルを  $b^\mu$  で表すことにする。このとき時空点 A から時空点 C への世界線も時間的となり、4 元ベクトル  $a^\mu + b^\mu$  で表される。(図 10 参照。)

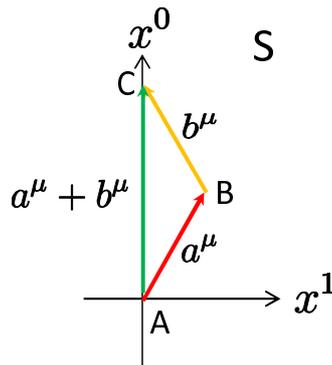


図 10: Minkowski 時空における時空点 A、B、C。

この時 AB 間、BC 間および AC 間の固有時間は

$$\tau_{AB} = \frac{1}{c}\sqrt{-a_\mu a^\mu}, \quad \tau_{BC} = \frac{1}{c}\sqrt{-b_\mu b^\mu}, \quad \tau_{AC} = \frac{1}{c}\sqrt{-(a_\mu + b_\mu)(a^\mu + b^\mu)}, \quad (97)$$

となる。このとき一般に

$$\tau_{AB} + \tau_{BC} \leq \tau_{AC}, \quad (98)$$

となることが分かる。これを Minkowski の不等式と呼ぶ。双子のパラドクスのはこの式から一般的に説明することができるのである。

式 (98) の証明は以下のようなになる。まず

$$\tau_{AC}^2 - (\tau_{AB} + \tau_{BC})^2 = \frac{2}{c^2} \left( -a_\mu b^\mu - \sqrt{(-a_\mu a^\mu)(-b_\nu b^\nu)} \right), \quad (99)$$

と計算できる。これが 0 以上であることを示せばよいが、それには Schwartz の不等式の 4 次元版を用いる。パラメータ  $t$  を使って  $d^\mu(t) = a^\mu + tb^\mu$  なる 4 元ベクトルを考えると、これは  $t$  が 0 以上のときは時間的になる。一方で  $t < 0$  のときは、 $d^\mu(t)$  はある領域で必ず空間的か光的になる。実際に  $t = -a^0/b^0$  と取ると、 $d^\mu(-a^0/b^0) = (0, a^1 - a^0 b^1/b^0, a^2 - a^0 b^2/b^0, a^3 - a^0 b^3/b^0)$  となるからである。従って

$$f(t) \equiv -d_\mu d^\mu = (-b_\mu b^\mu)t^2 + 2(-a_\mu b^\mu)t + (-a_\mu a^\mu), \quad (100)$$

とすると、 $f(t) = 0$  は  $t < 0$  の領域で必ず解を持つ必要があるので、判別式の条件から

$$(-a_\mu b^\mu)^2 - (-a_\mu a^\mu)(-b_\nu b^\nu) \geq 0, \quad (101)$$

となることが分かる。よって式 (99) は 0 以上であり、式 (98) は示された。

## 7.4 光のドップラー効果

S の原点に静止している観測者 O から見て、光源 L が速度  $v$  で  $x^1$  方向に運動している。そして、観測者 O は  $n^i$  方向へ伝播する電磁波を観測したとする。電磁波の解は式 (54) で与えられ、光子のエネルギーと運動量は

$$E = h\nu, \quad p^i = \frac{h\nu}{c} n^i, \quad (102)$$

で与えられるので、特に位相の部分は  $-Ex^0 + cp_i x^i$  と書くことができる。

光源が静止しているように見える座標系 S' では、変換 (90) よりこの位相は

$$\begin{aligned} -Ex^0 + cp_i x^i &= -\frac{E - p_1 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x'^0 + \frac{-Ev/c + cp_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x'^1 + cp_2 x'^2 + cp_3 x'^3 \\ &= -E' x'^0 + cp'_i x'^i, \end{aligned} \quad (103)$$

となる。右辺 2 行目では S' において電磁波はエネルギー  $E' = h\nu'$ 、運動量  $p'^i = \frac{h\nu'}{c} n'^i$  で伝搬しているとした。これより、エネルギーと運動量は Lorentz boost (88) の変換で

$$\begin{pmatrix} E' \\ cp'^1 \\ cp'^2 \\ cp'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ cp^1 \\ cp^2 \\ cp^3 \end{pmatrix}, \quad (104)$$

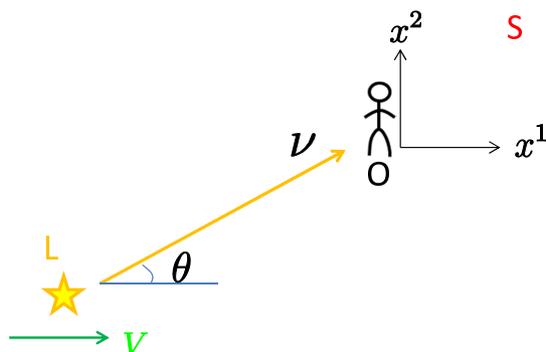


図 11: S の座標系で電磁波を観測。

となって、 $x^\mu$  と同じ変換をすることが分かる。すなわち運動量は

$$p^\mu = (E/c, p^i), \quad (105)$$

のように 4 次元のベクトルに拡張される。

ここで電磁波の進行方向が  $x^1$  軸となす角を  $\theta$  とすると  $cp^1 = E \cos \theta$  となり、 $x'^1$  軸となす角を  $\theta'$  とすると  $cp'^1 = E' \cos \theta'$  となるので、

$$\nu' = \frac{1 - v/c \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \nu, \quad (106)$$

$$\cos \theta' = \frac{-v/c + \cos \theta}{1 - v/c \cos \theta}, \quad (107)$$

なる関係式を得ることができる。

最初の式 (106) は、光源から出た電磁波の固有振動数  $\nu'$  と観測者 O に観測される振動数  $\nu$  の間の関係式である。 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  について考えると、それぞれ

$$\begin{aligned} \theta = 0: \nu' &= \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \nu < \nu \quad (\text{青方偏移}), \\ \theta = \frac{\pi}{2}: \nu' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \nu > \nu \quad (\text{赤方偏移}), \\ \theta = \pi: \nu' &= \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \nu > \nu \quad (\text{赤方偏移}), \end{aligned} \quad (108)$$

となり、Doppler 効果をみることが出来る。1,3 行目の式は縦 Doppler 効果と呼ばれ、2 行目の式は横 Doppler 効果と呼ばれることもある。横 Doppler 効果は音の場合は起きないが、光に関しては S と S' の時間のずれにより起きるのである。3 行目の式は、光源が観測者から遠ざかっていく場合であり、観測者は固有振動数より小さい振動数を観測することになる。これを赤方偏移と呼ぶ。この式を使うと、ある銀河から放射された電磁波の振動数  $\nu'$  が元素の性質から特定できたとして、その電磁波の振動数  $\nu$  を地球上で観測すれば、

銀河の相対速度  $v$  を求めることができる。1929 年、Hubble は 18 個の銀河の観測結果について考察し、銀河の速度  $v$  と地球からの距離  $d$  の間に

$$v = Hd, \quad (109)$$

なる比例関係があることを示唆した。これは Hubble の法則と呼ばれる。  $H$  は Hubble 定数と呼ばれる量で、現在における観測では  $H = 71 \text{ km/s/Mpc} = \frac{71 \times 10^3}{3.1 \times 10^{16} \times 10^6} \text{ s}^{-1}$  となることが分かっている。つまり、遠くの銀河ほど高速で地球から遠ざかっており、宇宙は膨張していることを意味する。また  $\frac{d}{v} = H^{-1} = 4.4 \times 10^{17} \text{ s} = 140 \text{ 億年}$  となり、これはおよそその宇宙の年齢の目安となる。

式 (107) は光行差を表す式である。  $S'$  の座標系から見て、光の速度と観測者の速度が直交している場合  $\theta' = \frac{\pi}{2}$  を考える。  $\theta = \frac{\pi}{2} - \Delta\theta$  として式 (107) に代入すると

$$\sin \Delta\theta = \frac{v}{c}, \quad (110)$$

となる。これは  $\frac{v}{c} \ll 1$  のときには  $\tan \Delta\theta = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \sim \frac{v}{c}$  となり、Bradley が用いた光行差の式で近似される。

問題 11. 式 (106) より、赤方偏移を起こす  $\theta$  の範囲を求めよ。

問題 12. 式 (107) に  $\theta = \theta' - \Delta\theta$  を代入して、 $\sin \Delta\theta$  を  $\theta'$  を使って書き表せ。

## 8 4次元時空の記法について

3次元空間の記法を4次元時空のものに拡張する。また、より一般的なテンソルについても解説を行う。

### 8.1 ベクトル

4次元時空の座標を  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  のように表し、この座標を適当に Lorentz 変換させて得られる新たな座標を  $(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$  とする。Lorentz 変換は式 (81) を満たす  $4 \times 4$  行列  $\Lambda$  による線形変換で

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_0 x^0 + \Lambda^{\mu}_1 x^1 + \Lambda^{\mu}_2 x^2 + \Lambda^{\mu}_3 x^3, \quad (111)$$

のように表される。この式で  $\mu, \nu$  は  $0, 1, 2, 3$  の値を取り、 $\nu$  については和記号を省略している。以後  $\nu$  のように、上付き添え字と下付き添え字で2度現れる添え字については、特に断らない限り和を取るものとする。

4次元時空  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  の内積は、式 (78) の  $(\mu, \nu)$  成分を  $\eta_{\mu\nu}$  として

$$\eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad (112)$$

のように表される。 $\eta_{\mu\nu}$  は Minkowski 時空の計量と呼ばれる、平坦な時空の計量テンソルである。さらに  $x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}x^\nu$  と定義すると、内積は

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu, \quad (113)$$

のように記述することもできる。 $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$  ( $\eta^2 = 1$ ) なので  $x^\mu = \eta^{\mu\nu}x_\nu$  として矛盾はない。よって、添え字の上げ下げはクロネッカーのデルタ  $\eta^{\mu\nu}$ ,  $\eta_{\mu\nu}$  を用いて行う。例えば  $\eta_{\mu\rho}\Lambda^\rho_\sigma\eta^{\sigma\nu} = \Lambda_\mu^\nu = (\Lambda^T)^\nu_\mu$  である。また、式 (81) は  $\Lambda^\rho_\mu(\Lambda^T)^\mu_\sigma = \delta_\sigma^\rho$  となるので、

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = (\Lambda^T)^\mu_\nu, \quad (114)$$

であることが分かる。

前節で導入した世界距離の 2 乗は計量テンソルを使って

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu, \quad (115)$$

と表記される。 $dx'_\mu = \eta_{\mu\nu}dx'^\nu = \Lambda_\mu^\nu dx_\nu = (\Lambda^T)^\nu_\mu dx_\nu = dx_\nu(\Lambda^{-1})^\nu_\mu$  を用いれば、世界距離の 2 乗は Lorentz 変換で不変なスカラー量であることが分かる。一般に、縮約をとった添え字に関しては Lorentz 変換の下でスカラーのように振る舞うことが分かる。まとめると、ベクトルとは Lorentz 変換の下で

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (116)$$

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu = (\Lambda^T)^\nu_\mu x_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu x_\nu, \quad (117)$$

のように変換するものである。特に (23) のように変換するものを反変ベクトル、(24) のように変換するものを共変ベクトルと呼ぶ。また 4 次元の運動量  $p^\mu = (E/c, p^1, p^2, p^3)$  は反変ベクトルとして振舞う。

4 次元時空の偏微分の記号を

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (118)$$

のように書く。偏微分の空間回転の下での変換は  $x'^\mu\Lambda_\mu^\nu = x^\nu$  に注意すると

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu, \quad (119)$$

となるので、添え字が下付きの共変ベクトルと同じ変換であることが分かる。また偏微分の添え字を  $\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$  のように上げることも問題なくできる。

$$\partial'^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial'_\nu = \eta^{\mu\nu}\Lambda_\nu^\rho\partial_\rho = \Lambda^\mu_\nu\partial^\nu. \quad (120)$$

このように偏微分記号の添え字の位置には意味があって、Lorentz 変換の下で上付きは反変ベクトル、下付きは共変ベクトルのように振る舞う。また、縮約していない添え字の位置は式変形で変わらない。例えば、上式では  $\mu$  は常に上にある。

## 8.2 テンソル

一般のテンソル  $T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}$  とは Lorentz 変換の下で

$$T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\rho_m} \Lambda_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\nu_n}^{\sigma_n} T^{\rho_1 \dots \rho_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}, \quad (121)$$

のように変換するものである。上付き添え字が  $m$  個、下付き添え字が  $n$  個なので、より明確に  $(m, n)$  テンソルと呼んだりもする。

特に (81) より

$$\eta'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \eta^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}, \quad (122)$$

なので、計量テンソルは Lorentz 変換に対して不変なテンソルである。さらに、4次元完全反対称テンソル  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  も

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det \Lambda \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (123)$$

なので不変テンソルである。なお4次元完全反対称テンソルとは、任意の2つの添え字の入れ替えについて反対称 (例えば  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma}$ ) で、1, 0, -1 の何れかの値を取るテンソルである。 $\epsilon^{0123} = 1$  とすると、 $\epsilon_{0123} = -1$  である。

問題 13. テンソル  $F^{\mu\nu}$  は Lorentz boost (88) でどのように変換するか具体的に成分で書き下せ。

## 9 特殊相対性理論と電磁気学

光速不変の原理により、Maxwell 方程式は Lorentz 変換をした後でも同じ方程式となる必要がある。これは Maxwell 方程式が例えば  $T^\mu(x) = 0$  のような4次元テンソルを用いた式に書けることを意味する。何故ならばこの式を Lorentz 変換すると  $\Lambda^\mu_\nu T'^\nu(x') = 0$  となるが、左から  $(\Lambda^{-1})^\rho_\mu$  を作用させると  $T'^\rho(x') = 0$  が得られるからである。 $x'$  は任意の時空点なので、特に  $T'^\mu(x) = 0$  としてもよく、従って方程式の形は Lorentz 変換で不変となる。この節では Maxwell 方程式を4次元記法を用いて記述し、Lorentz 変換のもとで方程式の形が変わらないことを確認する。

4節で説明した真空中での Maxwell 方程式 (45)、(46)、(47) および (48) は、4次元時空の記法を用いると

$$B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k, \quad (124)$$

$$E_i = c \left( \partial_i \left( \frac{\phi}{c} \right) - \partial_0 A_i \right), \quad (125)$$

$$\partial_i \partial^i \left( \frac{\phi}{c} \right) - \partial_0 \partial_i A^i = 0, \quad (126)$$

$$-\partial_\mu \partial^\mu A^i + \partial^i \left( -\partial_0 \left( \frac{\phi}{c} \right) + \partial_j A^j \right) = 0, \quad (127)$$

と書き換えられる。この式を 4 次元テンソルの形に書き直したい。すぐに思いつくのは  $A_0 \equiv \frac{1}{c}\phi$  と定義することである。これにより Maxwell 方程式は

$$B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k, \quad (128)$$

$$E_i = c(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i), \quad (129)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A_0 - \partial_0 \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu (\partial^\mu A_0 - \partial_0 A^\mu) = 0, \quad (130)$$

$$-\partial_\mu \partial^\mu A^i + \partial^i \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu (-\partial^\mu A^i + \partial^i A^\mu) = 0, \quad (131)$$

と書き換えられる。ただし 3 行目において  $\partial_0 \partial^0 A_0 - \partial_0 \partial_0 A^0 = 0$  を使った。

ここまで変形すると反対称テンソルの存在が浮かび上がっているのが分かるだろう。4 次元の反対称テンソルとして

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (132)$$

を導入する。 $F^{\mu\nu}$  はゲージ変換

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x), \quad (133)$$

のもとで不変であることが分かる。また、Bianchi 恒等式

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0, \quad (134)$$

を満たしていることが分かる。式 (128) と (129) より、 $F^{\mu\nu}$  と電磁場の対応は

$$E_i = cF_{i0}, \quad B^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F_{jk}, \quad (135)$$

のように書き表される。あるいは反対称テンソル  $F^{\mu\nu}$  を  $4 \times 4$  行列で表記すると

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ -\frac{1}{c}E_1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -\frac{1}{c}E_2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -\frac{1}{c}E_3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (136)$$

のようになる。そして残りの Maxwell 方程式 (130) と (131) は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (137)$$

のようにまとめて書くことができる。

Maxwell 方程式 (137) を導くような Lagrangian は運動方程式を“積分”することで見つけることができる。具体的には

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu = \partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) - F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu) \sim -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = \delta \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (138)$$

のように計算できる。ここで  $\sim$  は全微分項を無視したことを意味する。次元を合わせるように係数を選ぶと作用は

$$S[A^\mu] = -\frac{1}{4\mu_0} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (139)$$

のように与えればよいことが分かる。この作用は Lorentz 変換とゲージ変換の下で不変である。

まとめると電磁気学の作用は式 (139) であり、変分原理によって運動方程式 (137) が得られる。これは Maxwell 方程式の (41) および (42) に相当するものである。また Bianchi 恒等式 (134) は Maxwell 方程式の (43) および (44) に対応している。

問題 14. Lorentz boost (88) で電磁場はどのように変換されるかを求めよ。(問題 13 を参考にすること。)

問題 15. Bianchi 恒等式を示せ。またこの式を電場と磁場で表すとどうなるかを考えよ。

## 10 特殊相対性理論に基づく力学

Newton 力学は  $\frac{v}{c} \ll 1$  の場合に成り立つ法則であるが、 $1 \ll \frac{v}{c}$  の場合には適用できない。この節では力学の法則が Lorentz 変換の下で不変になるように修正を行う。そのためには Lagrange 形式による力学の法則の定式化が見通しがよい。まず Newton 力学の Lagrange 形式について復習する。それから Lorentz 変換で不変な作用を見つけ出し、相対論的な力学法則を導出する。

### 10.1 Lagrange 形式の復習

Newton 力学の Lagrangian  $L$  は運動項からポテンシャル項を引いたものであり、作用  $S$  は  $L$  を時間で積分した量として定義される。

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}_i - V(x), \quad S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt L. \quad (140)$$

そして運動方程式は変分原理から導出される。すなわち、 $\delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0$  という固定端の条件の下で

$$\begin{aligned} \delta S[x] &= \int_{t_1}^{t_2} dt (m \dot{x}^i \delta \dot{x}_i - \partial_i V \delta x^i) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt (-m \ddot{x}^i - \partial^i V) \delta x_i + m \dot{x}^i \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (141)$$

を任意の  $\delta x^i(t)$  について満たすという要請から

$$m \ddot{x}^i = -\partial^i V, \quad (142)$$

が得られる。また  $x^i$  に共役な運動量  $p_i$  は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m \dot{x}_i, \quad (143)$$

で定義され、Hamiltonian(エネルギー)は

$$\begin{aligned} H &= p^i \dot{x}_i - L \\ &= \frac{p_i p^i}{2m} + V(x), \end{aligned} \quad (144)$$

のようになる。

## 10.2 相対論的力学

まず Lorentz 変換の下で不変な Lagrangian について考えよう。座標系  $(x^0, x^i)$  で運動している粒子の軌跡は、形式的には空間の位置を時間  $t = x^0/c$  の関数として  $x^i(t)$  のように与えられる。これは 4 次元時空では時間的な世界線で表される。(図 8 参照。)そして、世界線が時間的な場合は  $ds^2$  は負の量であり、Lorentz 変換の下で不変であった。そこで、作用の形を世界線の長さとして

$$S[x] = a \int \sqrt{-ds^2} = a \int dx^0 \sqrt{1 - \frac{dx_i dx^i}{dx^0 dx^0}} = ac \int dt \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{c^2}}, \quad (145)$$

のように仮定しよう。この式を粒子の速度が光速に比べて十分に遅いとして展開すると

$$S[x] \sim ac \int dt \left(1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{2c^2}\right), \quad (146)$$

となるので、これが定数を除いて Newton 力学の場合の運動項に一致するには  $a = -mc$  である必要がある。

以上により相対論的な力学の運動項に相当する Lagrangian は

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{c^2}}, \quad (147)$$

のように与えられる。共役運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{c^2}}}, \quad (148)$$

で定義され、Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H &= p^i \dot{x}_i - L \\ &= \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, \end{aligned} \quad (149)$$

のようになる。ただし  $p^2 = p_i p^i$  である。これは質量  $m$  の粒子のエネルギー  $E$  であり、特に  $p^i = 0$  であっても  $E = mc^2$  となることが分かる。これを静止エネルギーと呼ぶ。エネルギーと質量は変換可能であり、これより質量に欠損があればその分だけエネルギーを取り出せることになる。

最後に電磁場中を運動する電荷  $q$  の荷電粒子について運動方程式を書き下しておこう。 $A_\mu dx^\mu$  は Lorentz 変換の下で不変なので、これを相互作用項として加えると作用は

$$\begin{aligned} S[x] &= -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{c^2}} + q \int dt A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} \\ &= -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{c^2}} + q \int dt (cA_0 + A_i \dot{x}^i), \end{aligned} \quad (150)$$

となる。ゲージポテンシャル  $A_\mu(t, x^i(t))$  は  $t$  と  $x^i(t)$  に依存する。作用の微小変化を行うと

$$\begin{aligned} \delta S[x] &= \int dt \frac{m\dot{x}_i \delta \dot{x}^i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}}} + q \int dt (c\partial_i A_0 \delta x^i + \partial_i A_j \delta x^i \dot{x}^j + A_i \delta \dot{x}^i) \\ &\sim - \int dt \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}}} \right) \delta x^i + q \int dt \left( c\partial_i A_0 + \partial_i A_j \dot{x}^j - \frac{dA_i}{dt} \right) \delta x^i \\ &= - \int dt \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}}} \right) \delta x^i + q \int dt \left( c(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) + (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \dot{x}^j \right) \delta x^i \\ &= - \int dt \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}}} \right) \delta x^i + q \int dt (cF_{i0} + F_{ij} \dot{x}^j) \delta x^i \\ &= - \int dt \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}}} \right) \delta x^i + q \int dt (E_i + \epsilon_{ijk} \dot{x}^j B^k) \delta x^i, \end{aligned} \quad (151)$$

のように計算できる。これが任意の  $\delta x$  について 0 になることを要請すると、運動方程式

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}}} \right) = qE_i + \epsilon_{ijk} q \dot{x}^j B^k, \quad (152)$$

が得られる。左辺は加速度  $\ddot{x}_i$  が相対論的に修正されており、右辺は電荷  $q$  をもつ粒子がいつものように電場方向への力と Lorentz 力を受けることを示している。右辺の力は修正を受けていないが、それはもともと電磁気学が特殊相対性理論と整合するように構築されていたからである。ちなみに固有時間  $d\tau = \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}} dt$  を用いると運動方程式 (152) は

$$m \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = qF_{i\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (153)$$

と書ける。

### 10.3 一様磁場中の荷電粒子の運動

電場  $E^i = 0$  で磁場  $B^i$  が時空によらず一様であるとする。このときの荷電粒子の運動を式 (152) を解いて理解しよう。まず両辺に  $\dot{x}^i$  をかけると右辺は 0 になるので

$$\dot{x}^i \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}}} \right) = \frac{\dot{x}^i \ddot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}}} + \frac{\frac{\dot{x}^k \dot{x}_k \dot{x}^i \ddot{x}_i}{c^2}}{\left(1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{\dot{x}^i \ddot{x}_i}{\left(1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}^j}{c^2}\right)^{3/2}} = 0, \quad (154)$$

のようになり、 $\dot{x}^i \dot{x}_i = v^2$  (定数) が導かれる。すると運動方程式 (152) は積分を実行できて、

$$\dot{x}^i = \epsilon^i_{jk} \frac{q\sqrt{1-v^2/c^2}}{m} x^j B^k + C^i, \quad (155)$$

となる。ここで  $C^i$  は積分定数である。以下では簡単のため  $C^i = 0$  の場合を考える。磁場がかかっている方向を  $x^3$  方向にとり  $B^3 = B$ 、 $\omega = \frac{qB\sqrt{1-v^2/c^2}}{m}$  とおくと、運動方程式は

$$\dot{x}^1 = \omega x^2, \quad \dot{x}^2 = -\omega x^1, \quad \dot{x}^3 = 0, \quad (156)$$

となる。よって  $\dot{x}^i \dot{x}_i = v^2$  に注意すると

$$x^1 = \frac{v}{\omega} \cos \omega t, \quad x^2 = -\frac{v}{\omega} \sin \omega t, \quad x^3 = D^3, \quad (157)$$

である。 $D^3$  は積分定数である。

これより荷電粒子は  $(x^1, x^2)$  平面内で時計周りに角速度  $\omega$  で等速円運動を行い、その半径  $R$  は

$$R = \frac{mv}{|q|B\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (158)$$

であることが分かる。荷電粒子が光速に近い速度で運動している場合にはサイクロトロン  
の円運動の半径は非相対論的な場合 ( $R = \frac{mv}{|q|B}$ ) とは大幅にずれることが分かる。

問題 16. 式 (158) から実験室で電子の相対論の効果をみるには、 $B$  や  $v$  をどの程度に調整すればよいか考えよ。

## 11 まとめ

特殊相対性理論は電磁気学に自然に包含されていることが伝わただろうか。数学としては線形代数の初歩的な知識しか必要ないので、数式で分からない部分はしっかり考えて欲しい。特殊相対性理論は時間と空間を対等に扱っているので、経験則はあてはまらないが、現代物理学ではゆるぎない地位を占めている。ぜひ相対性理論の世界観を習得して欲しい。期末試験は7月13日(金)13:00-14:30で範囲は10節までの内容とする。試験後の講義は一般相対論などの話題に軽く触れることにする。