

# 力学の講義ノート

百武慶文

最終更新日: 2016 年 7 月 29 日

## 目次

<b>1</b>	<b>力学とは何か?</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Newton 力学における運動の法則</b>	<b>6</b>
2.1	運動の 3 法則と万有引力の法則	6
2.2	力学に必要な数学の基礎 1 — スカラーとベクトル	7
<b>3</b>	<b>1 次元空間での物体の運動</b>	<b>9</b>
3.1	等加速度直線運動と自由落下	9
3.2	力学に必要な数学の基礎 2 — 微分と積分	10
3.3	速度に比例する空気抵抗があるときの物体の落下運動	12
3.4	ばねによる振動	14
3.5	力学に必要な数学の基礎 3 — 指数関数と三角関数	15
<b>4</b>	<b>2 次元空間での物体の運動</b>	<b>16</b>
4.1	一様重力中における物体の斜方投射	17
4.2	一様重力中における空気抵抗があるときの物体の斜方投射	18
4.3	力学に必要な数学の基礎 4 — Taylor 展開	19
4.4	一様磁場中の荷電粒子の運動	21
4.5	2 次元直交座標と極座標	22
4.6	単振り子の運動	24
<b>5</b>	<b>2 体問題における惑星の運動</b>	<b>27</b>
5.1	2 体問題における重心運動と相対運動	27
5.2	Kepler の法則	28
5.3	惑星の運動	28
5.4	楕円、放物線および双曲線の軌道について	31
5.5	力学に必要な数学の基礎 5 — 双曲線関数	33
<b>6</b>	<b>運動量と力積</b>	<b>35</b>
6.1	運動量と力積	36
6.2	運動量保存の法則	37
<b>7</b>	<b>仕事とエネルギー</b>	<b>38</b>
7.1	運動エネルギーと仕事	38
7.2	保存力、ポテンシャルエネルギーおよびエネルギー保存の法則	39
7.3	力が保存力であるための必要十分条件	41
<b>8</b>	<b>角運動量と力のモーメント</b>	<b>44</b>
8.1	力学に必要な数学の基礎 6 — ベクトルの外積	44
8.2	角運動量と力のモーメント	45
8.3	角運動量保存の法則	46

<b>9</b>	<b>極座標による記述</b>	<b>47</b>
9.1	3次元直交座標と極座標 . . . . .	47
9.2	地球の重力によるポテンシャルエネルギー . . . . .	50
<b>10</b>	<b>まとめ</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>2体問題における Rutherford 散乱</b>	<b>53</b>
A.1	Coulomb 力 . . . . .	53
A.2	Rutherford 散乱 . . . . .	53
A.3	双曲線軌道と散乱断面積 . . . . .	56
<b>B</b>	<b>ベクトル解析の基礎</b>	<b>59</b>
B.1	力学に必要な数学の基礎 7 — ベクトル解析の基礎 . . . . .	59
B.2	力学に必要な数学の基礎 8 — 線積分、面積分および体積積分 . . . . .	62
B.3	Stokes の定理と Gauss の定理 . . . . .	65

# 1 力学とは何か？

物理学の発展は現代社会の技術革新には必要不可欠である。ラジオ、テレビ、電話、パソコン、車、飛行機など、物理学に基づいた技術製品が数多くある。物理学によって物事の状態やその変化を正確に記述できるようになり、それを基に新しい技術が開発されるのである。従って、現代社会においては物理学の素養は一般の人々が思っている以上に大切であり、様々な分野の研究にも欠かせない存在となっている。この講義では、物理学の出発点であり一番身近な理論である力学について解説する。

現代力学は、Newton が 1665 年に運動の法則

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

を発見したことで幕を開ける。ここで  $m$  は物体の質量 (慣性質量)、 $\mathbf{r}$  は物体の位置であり、 $\mathbf{F}$  は物体に働く力を表す。3次元空間のベクトル量は太文字で表している。この方程式の真偽は実験や観測によって検証されるべきものであるが、例えば斜面を転がる物体がこの方程式に従って運動することは確認できる<sup>1</sup>。方程式を解くと、斜面を転がる物体は等加速度直線運動することが予想できるが、高校物理の実験でこれを確認した人も多いだろう。

力学の問題を解くということは、物体の質量と物体に働く力が与えられたときに、物体の位置を時間の関数として求めることである。あるいは物体が描く軌道を求めることでもある。1609年にはケプラーの第1法則が発表されて、太陽を周回する惑星は軌道楕円を描くことが知られていたが、Newtonは万有引力の法則を(1)に適用して、実際に惑星の楕円軌道を導くことに成功した<sup>2</sup>。

この講義の主な目的は、微分積分を駆使してNewtonの運動方程式を解き、日常における物体の運動を解析的に理解できるようになることである。我々が日常で経験する物体の運動は、Newtonの運動方程式という非常に簡単な方程式に支配されていることを学んで自分のものにして欲しい。具体的には、ばねの力が働いている場合の物体の運動や一様重力場における物体の運動を解析することで数学的基礎を習得し、さらに万有引力の法則に基づく惑星の運動について学んでいく予定である。

ここで以下で我々が使う国際単位系 (SI 単位系) についてまとめておく。力学に出てくる物理量は次元をもっており、独立な基本量としては、 $T=[時間]$ 、 $L=[長さ]$ 、 $M=[質量]$  の3つをを選ぶ。例えば式(1)を例にとって考えると、

$$[m] = M, \quad [r] = L, \quad [dt] = T, \quad [F] = MLT^{-2}, \quad (2)$$

のように表され、等式の左辺と右辺では次元は必ず等しくなる。そして、SI 単位系では時

<sup>1</sup>Galileiの斜面の実験。Galileiは「新科学対話」(1638)において、物体の落下距離は時間の2乗に比例し、物体の質量には依らないことを示した。ピサの斜塔から物体を落下させる話は作り話のようだ。

<sup>2</sup>Newtonの著書「プリンキピア」(1687)では、微積分を使って(1)を解くというよりは、幾何的な方法で楕円軌道を説明しているらしい。

間、長さおよび質量は以下のような単位を採用する<sup>3</sup>。

- 1 s (second) : 原子時計で定義
- 1 m (meter) : 光が真空中を  $\frac{1}{299792458}$  s の間に進む距離として定義 (3)
- 1 kg (kilogram) : キログラム原器の質量を 1kg と定義

力の単位はこれらを組みあわせた 1 N (Newton) = 1 kg m s<sup>-2</sup> で与えられる。

最後に、物理学における力学の適用範囲について述べておく<sup>4</sup>。力学は我々の日常経験を方程式として抽出した理論なので、人間の活動範囲においては問題なく適用できる。より具体的に述べると、物体の速度が光速に比べて十分に遅く、かつ物体間の距離が 10<sup>-10</sup> m より十分大きく 1Gpc(ギガパーセク)より十分小さい場合に適用できる<sup>5</sup>。かなり広範囲である。物体の速度が光速に近くなると、特殊相対性理論を適用する必要があり、また物体が原子や原子核のような 10<sup>-10</sup> m 以下の大きさでは量子力学を適用する必要がある。(図 1 参照) 数 Gpc のような宇宙の大規模スケールの観測では、力学は一般相対性理論にとって代わられる。物体がアボガドロ数のように非常に多数ある場合には、力学を解析的に解くことはできなくなり、熱力学や統計力学、場の理論、あるいはコンピュータの力を借りることになる。

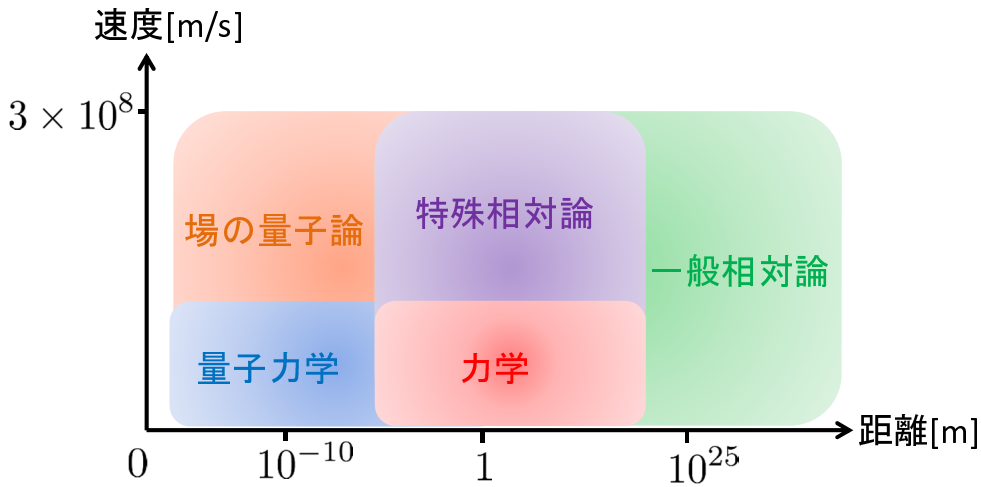


図 1: 力学の適用範囲の概略図

<sup>3</sup>特殊相対性理論では光の速さは座標系によらず一定であり、質量をもつ物体の速度は光速を超えない。

<sup>4</sup>力の種類としては、重力、電磁力、弱い力、強い力の 4 つがある。(Higgs 粒子による力も含めると 5 つ。) 重力と電磁力は無限遠方まで到達する長距離力なので、我々は日常的にこれらの力を体験している。弱い力と強い力は短距離力で、10<sup>-10</sup> m 以下の量子論の世界で重要になる。重力以外の力は、場の量子論によって量子論的に記述できる。

<sup>5</sup>1pc = 3.08568 × 10<sup>16</sup> m は天文学で用いられる単位。物理では数のスケールが 10<sup>3</sup> 倍になるときに、1k(キロ) = 10<sup>3</sup>、1M(メガ) = 10<sup>6</sup>、1G(ギガ) = 10<sup>9</sup>、1T(テラ) = 10<sup>12</sup> を用いる。数のスケールが 10<sup>-3</sup> 倍になるときに、1m(ミリ) = 10<sup>-3</sup>、1 μ(マイクロ) = 10<sup>-6</sup>、1n(ナノ) = 10<sup>-9</sup>、1p(ピコ) = 10<sup>-12</sup>、1f(フェムト) = 10<sup>-15</sup> を用いる。1Gpc = 3.08568 × 10<sup>25</sup> m。

## 2 Newton 力学における運動の法則

### 2.1 運動の 3 法則と万有引力の法則

Newton の運動法則について詳しくみていくことにしよう。物体は通常大きさを持ち回転運動をすることができるが、それらを見捨てることのできる時その物体を質点と呼ぶ。Newton は質点に対する運動法則として、以下の 3 つを提唱した。

**第 1 法則:** 力を加えられていない質点は、静止し続けるか等速直線運動をし続ける。

この法則は慣性の法則とも呼ばれる。このような考えは Galilei によって既に提唱されていたものである。この法則は、第 1 法則が成り立つような座標系を選ぶことができる、と言ってもよい。このような座標系を慣性系と呼ぶ。例えば、等速直線運動をしている電車の中の人、慣性系にいると考えてよい。電車の床にボールをそっと置いたとしても、そのボールは静止し続ける。しかし、電車が停車するためにブレーキをかけ始めると、電車の中は慣性系ではなくなる。床に静止していたボールは、ボールに力が加えられていないけれども前方に運動を始めるのである。また、ある座標系  $S$  が慣性系であるとすると、それと等価な慣性系  $S'$  は無数に存在する。 $S$  から見て  $S'$  の原点が等速直線運動をしている場合には、 $S$  と  $S'$  は等価な慣性系である。

**第 2 法則:** 慣性系において質量  $m$  の質点に力  $\mathbf{F}$  が加わっているとすると、このとき質点の運動方程式は (1) で与えられる。

「プリンキピア」では、運動の変化は及ぼされる力に比例しその力が及ぼされる直線方向に行われる、とある。これを式を使って表すと (1) のようになるのである。ここでもう一度繰り返しておくが、第 2 法則が適用できるのは慣性系においてのみである。非慣性系では Newton の運動方程式は修正しないと行けない。例えば、宇宙ステーションにいる人は非慣性系におり、地球からの重力以外に遠心力を考慮する必要がある。しかし、これらの力はずりあっているので、あたかも無重力空間の慣性系にいると考えることができるのである<sup>6</sup>。同様に地球は太陽を周回しているので、厳密には地球上にいる我々も非慣性系にいる。しかし、地表での物体の運動を考えるときには、物体が太陽から受ける引力と物体にはたらく遠心力は相殺するので、太陽からの引力を見捨てるような慣性系にいると考えてよいのである。

**第 3 法則:** 質点 1 と質点 2 があって、質点 1 は質点 2 から力  $\mathbf{F}_{12}$  を受け、質点 2 は質点 1 から力  $\mathbf{F}_{21}$  を受けるとする。このとき常に  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  が成り立つ。

この法則は作用反作用の法則とも呼ばれる。2 つの物体が相互作用している場合には、作用と反作用の力は大きさは同じで向きが反対となることを式は表している。例えば物体を手で押したとすると、物体は手から力を受けるが、手も物体から同じ大きさで向きが反対の力を受ける。

<sup>6</sup>この考えを推し進めることで、1915 年に Einstein は一般相対性理論に辿り着いた。

以上の3つが Newton 力学の運動法則である。質点の運動を解析的に求める場合には、まず慣性系を考えて、質点にどのような力が働くかを考察し、運動方程式 (1) を解くことになる。このとき、質点には様々な力がはたらくのであるが、重力に関しては万有引力の法則がある。万有引力の法則とは、質量  $m_1$  の質点 1 が位置  $\mathbf{r}_1$  にあり、質量  $m_2$  の質点 2 が位置  $\mathbf{r}_2$  にある場合には、質点 1 には引力

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (4)$$

がはたらき、質点 2 には引力  $-\mathbf{F}$  がはたらく、という法則である。ここで

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}, \quad (5)$$

は万有引力定数と呼ばれる。

問 1 万有引力定数の次元を求めよ。

## 2.2 力学に必要な数学の基礎 1 — スカラーとベクトル

運動方程式 (1) や万有引力 (4) の表記にはベクトルの記号を用いている。そこで、ここでは力学を考える際に必要となるスカラーとベクトルについて説明し、それらの性質についてまとめておく。

まずスカラーについて考えよう。スカラーは大きさをもつ量で、物体の質量  $m$  はスカラーである。また物体と原点  $O$  との間の距離もスカラーである。原点  $O$  にいる観測者が回転して新たな座標系に移ったとしても、スカラー量の値は変わらない。

次にベクトルについて考えよう。ベクトルとは平たく言うと、向きと大きさをもつ量のことである。3次元空間の座標系として、互いに直交する座標軸を  $x, y, z$  軸にとる直交座標 (デカルト座標) を採用しよう。物体の位置を  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  と指定したとき、 $\mathbf{r}$  はベクトルであり、その大きさは  $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  で与えられる。物体の位置を時間の関数だと考えて、時間で微分して得られる速度  $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  や加速度  $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$  もベクトルである。ここでドットは時間微分を表す省略記号である。原点  $O$  にいる観測者が回転して新たな座標系に移ったとすると、ベクトルは大きさを変えず向きが変わる。等式において左辺がベクトル量であれば、右辺もベクトル量でなくてはならない。例えば式 (1) と (4) は左辺も右辺もベクトル量である。

力学でよく出てくるスカラーとベクトルの例を以下にまとめておこう<sup>7</sup>。

$$\begin{aligned} \text{スカラー: 質量 } m, \text{ 距離 } |\mathbf{r}|, \text{ 速さ } |\dot{\mathbf{r}}|, \text{ エネルギー } E, \\ \text{ベクトル: 位置 } \mathbf{r}, \text{ 速度 } \dot{\mathbf{r}}, \text{ 加速度 } \ddot{\mathbf{r}}, \text{ 力 } \mathbf{F}, \text{ 運動量 } m\dot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$  である。

<sup>7</sup>特殊相対性理論ではスカラーとベクトルの定義は力学のそれとは異なる。例えばエネルギーはスカラーではない。特殊相対性理論は時間と空間を対等に扱い、Lorentz 変換と呼ばれる空間回転を時間を含めて拡張した対称性で不変な理論である。

Newton の運動方程式はスカラーとベクトルを使って書かれているので、それらの間の演算についても述べておく。まず、スカラーとベクトルの積はベクトルである。例えば、式 (1) の左辺は、質量×加速度でベクトルになっている。次に、ベクトルとベクトルの和はベクトルである。例えば、物体に 3 つの力  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$  が加わっているとすると、式 (1) の右辺は  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$  となる。このようにベクトルには“スカラー倍”と“和”が定義されており、ベクトルの集合をベクトル空間と呼ぶ。

ベクトル空間に属する 2 つのベクトルからスカラーをつくることもでき、このような操作を内積と呼ぶ。 $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  とすると、それらの内積は

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2| \cos \theta, \quad (7)$$

のように与えられる。ここで  $\theta$  は 2 つのベクトルの間の角である。2 つのベクトルが直交している場合には、内積は 0 となる。また、ベクトル  $\mathbf{r}$  同士の内積は  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}|^2$  となり、原点からの距離の 2 乗を与える。もう一つ重要な操作として、2 つのベクトルから新たなベクトルを作る外積と呼ばれるものがあるが、これは後で必要なときに述べることにする。

ベクトルを表す記法として、基底ベクトルを用いることがある<sup>8</sup>。直交座標の場合には基底ベクトルとして

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

のようなベクトルの組を選ぶ。これらのベクトルは

$$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad (9)$$

を満たすので、これらは単位ベクトルで互いに直交している。ちなみに大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルと呼び、任意のベクトル  $\mathbf{r}$  は  $\frac{\mathbf{r}}{r}$  とすることで単位ベクトルになる。基底ベクトルを用いると、位置ベクトルや力のベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{F} &= F_x \mathbf{e}_1 + F_y \mathbf{e}_2 + F_z \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (10)$$

のように表すことができる。Newton の運動方程式を基底ベクトルを用いて表すと

$$m\ddot{x} \mathbf{e}_1 + m\ddot{y} \mathbf{e}_2 + m\ddot{z} \mathbf{e}_3 = F_x \mathbf{e}_1 + F_y \mathbf{e}_2 + F_z \mathbf{e}_3, \quad (11)$$

のように書くことができる。この式と  $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$  の内積を考えると、それぞれ

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (12)$$

を得ることができる。

**問 2**  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$  および  $\mathbf{z} \cdot (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a(\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}) + b(\mathbf{z} \cdot \mathbf{y})$  を示せ。

**問 3** 2次元空間において、時刻  $t$  における 2次元空間の位置ベクトル  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$  が与えられたとする。速度ベクトル  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  および加速度ベクトル  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$  を求めよ。また内積  $\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$  を求めよ。

<sup>8</sup>線形空間の 1 次独立なベクトルのことを基底ベクトルと呼ぶ。詳しくは線形代数の教科書を参照のこと。



### 3 1次元空間での物体の運動

Newtonの運動方程式は微分方程式であり、それを積分できれば物体の位置を時間の関数として表すことができる。ここでは1次元における物体の運動について考えることにしよう。また、途中で必要な数学の基礎についても触れる。

#### 3.1 等加速度直線運動と自由落下

質量  $m$  の物体が  $x$  軸方向にのみ運動している状況を考える。物体に一定の力  $F$  が  $x$  軸正の方向に加えられているとすると、 $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ 、 $\mathbf{F} = (F, 0, 0)$  となるので、Newtonの運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F, \quad (13)$$

となる。この式より質量  $m$  が大きいほど物体は加速しにくいことが分かるが、これは日常生活でよく経験することだろう。式(13)は簡単に積分することができて、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + A, \quad x(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m}t^2 + At + B, \quad (14)$$

となる<sup>9</sup>。ここで、 $A$ と $B$ は積分定数である。このように、積分をするたびに積分定数が1つ現れる。Newtonの運動方程式を解くときは時間について2回積分するので、積分定数が2つ現れるのである。特に $F = 0$ の場合には、物体は等速直線運動をすることが分かる。これは第1法則と矛盾しない。

積分定数は物理的な量と関係している。今考えている物体が $t = 0$ において $x(0) = x_0$ 、 $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$ であるとすると、

$$A = v_0, \quad B = x_0, \quad (15)$$

となる。このように、 $t = 0$ における物体の運動の状態を指定することを、初期条件を与えるという。積分定数は初期条件を与えることで物理的な量で書き表されるのである。

等加速度直線運動の具体的な例として、質量  $m$  の物体が地表の1様重力によって自由落下する運動を考えよう。鉛直上向きを  $z$  軸正の方向とする。重力加速度の大きさを  $g$  とすると、Newtonの運動方程式は

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg, \quad (16)$$

となる。万有引力の法則を使って  $g$  を表すと

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad (17)$$

となる。ここで、 $M$ は地球の質量であり、 $R$ は地球の半径である。数値を代入すると $g = 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ を得る。

<sup>9</sup> $t$ を変数とする関数であることを強調して $x(t)$ と書いた。ただしそれは明らかなので、計算の途中では単に $x$ や $\frac{dx}{dt}$ と記すことにする。

式 (16) は簡単に積分できて

$$\frac{dz}{dt} = -gt + A, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B, \quad (18)$$

となる。ここで初期条件として、 $t = 0$  において  $z(0) = z_0$ 、 $\dot{z}(0) = v_0$  とおくと、運動方程式の解は

$$\begin{aligned} z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0 \\ &= -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + z_0 + \frac{v_0^2}{2g}, \end{aligned} \quad (19)$$

のように表される。これより物体は、 $t = \frac{v_0}{g}$  のときに最高点  $z = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$  に到達することがわかる。

問 4 式 (17) より  $g$  の値を求めよ。 $M = 6.0 \times 10^{24}$  kg および  $R = 6400$  km を用いてよい。

### 3.2 力学に必要な数学の基礎 2 — 微分と積分

力学に必要な初等関数の微分積分についてまとめておく。この内容がよく分からないという人は、高校の「数学 III」の教科書を読みなおして欲しい。微分積分は力学とともに発展した数学であり、高校の数学は力学を理解するための基礎である。

まず微分の性質について簡単にまとめておく。関数  $x(t)$  の  $t$  についての微分は

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad (20)$$

で定義される。この式は  $dx = \frac{dx}{dt} dt$  と書いてもよい。関数の積  $x(t)y(t)$  の  $t$  についての微分は

$$\begin{aligned} \frac{d(xy)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t)y(t + \Delta t) - x(t)y(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\{x(t + \Delta t) - x(t)\}y(t + \Delta t) + x(t)\{y(t + \Delta t) - y(t)\}}{\Delta t} \\ &= \frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt}, \end{aligned} \quad (21)$$

となり、これは Leibniz ルールと呼ばれる。この式は両辺に  $dt$  をかけて、 $d(xy) = dx y + x dy$  と書いてもよい。合成関数  $V(x(t))$  の  $t$  についての微分は

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(x(t + \Delta t)) - V(x(t))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(x(t + \Delta t)) - V(x(t))}{x(t + \Delta t) - x(t)} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt}, \end{aligned} \quad (22)$$

を得る。この式は  $dV(x) = \frac{dV}{dx} dx = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} dt$  と表記してもよい。

初等関数の微分は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \frac{d(t^n)}{dt} &= nt^{n-1}, & \frac{d(e^t)}{dt} &= e^t, & \frac{d(\log t)}{dt} &= \frac{1}{t}, \\ \frac{d(\cos t)}{dt} &= -\sin t, & \frac{d(\sin t)}{dt} &= \cos t. \end{aligned} \quad (23)$$

これらと微分の性質 (21)、(22) を組み合わせれば、初等関数の微分は必ず実行できる。例えば

$$\begin{aligned} \frac{d(e^{-t^2})}{dt} &= \frac{d(e^{-t^2})}{d(-t^2)} \frac{d(-t^2)}{dt} = -2te^{-t^2}, \\ \frac{d(\log(1+t^2))}{dt} &= \frac{d(\log(1+t^2))}{d(1+t^2)} \frac{d(1+t^2)}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \frac{d(\tan t)}{dt} &= \frac{d(\sin t)}{dt} \frac{1}{\cos t} + \sin t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\cos t} \right) = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}, \end{aligned} \quad (24)$$

などである。

次に積分の性質について簡単にまとめておこう。関数  $v(t)$  の  $t$  についての積分は以下のように定義される。

$$\int_{t_1}^{t_2} dt v(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t v(t_1 + n\Delta t), \quad \Delta t = \frac{t_2 - t_1}{N}. \quad (25)$$

これは関数  $v(t)$ ,  $t$  軸と  $t_1 \leq t \leq t_2$  で囲まれた領域の面積を表す。もし  $v(t)$  が物体の速度であるとする、積分は  $t_1 \leq t \leq t_2$  間における物体の位置の変位を表すことになる。このことは以下のように定義式を変形できることから明らかである。

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t v(t_1 + n\Delta t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \frac{x(t_1 + (n+1)\Delta t) - x(t_1 + n\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \{x(t_1 + (n+1)\Delta t) - x(t_1 + n\Delta t)\} \\ &= x(t_2) - x(t_1). \end{aligned} \quad (26)$$

この式を微積分の記法を用いて表すと

$$\int_{t_1}^{t_2} dt v(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dx}{dt} = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} dx = x(t_2) - x(t_1), \quad (27)$$

となる。従って関数  $v(t)$  の  $t$  に関する積分は、 $v dt = dx$  となる関数  $x(t)$  を探すことと等価である。つまり、積分は微分の逆の操作である。

積分範囲を指定しないで積分をすることを不定積分という。上記を不定積分で表すと

$$\int dt v(t) = \int dt \frac{dx}{dt} = \int dx = x(t) + C, \quad (28)$$

となる。ここで  $C$  は積分定数である。初等関数の不定積分について、いくつか例を挙げておこう。

$$\begin{aligned}\int dt e^{at} &= \int d\left(\frac{1}{a}e^{at}\right) = \frac{1}{a}e^{at} + C, \\ \int dt \log(at) &= \int d(t \log(at) - t) = t \log(at) - t + C, \\ \int dt \cos t &= \int d(\sin t) = \sin t + C, \\ \int dv \frac{1}{v} &= \log |v| + C.\end{aligned}\tag{29}$$

繰り返すが、微積分は力学の基礎なのでしっかりと習得しておいて欲しい<sup>10</sup>。

問 5 以下の微分を計算せよ。

$$\frac{d}{dx}(\log(1+x) + \log(1-x)).$$

### 3.3 速度に比例する空気抵抗があるときの物体の落下運動

質量  $m$  の物体が地表の一定重力によって落下する運動を考えよう。ただし、落下中の物体には物体の速度  $v(t) = \frac{dz}{dt}$  に比例する空気抵抗  $-kv(t)$  ( $0 < k$ ) がはたらいているとする。物体の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv = -k\left(v + \frac{mg}{k}\right),\tag{30}$$

となる<sup>11</sup>。

ここで  $v' = v + \frac{mg}{k}$  と変数変換を行うと、微分方程式は

$$\frac{dv'}{dt} = -\frac{k}{m}v',\tag{31}$$

となる。これは指数の微分が  $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$  となることに注意すると、

$$v' = Ae^{-\frac{k}{m}t},\tag{32}$$

のように解くことができる。ここで  $A$  は積分定数である。従って

$$\frac{dz}{dt} = Ae^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k},\tag{33}$$

を得ることができる。これをもう一度積分すると

$$z(t) = -\frac{mA}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + B,\tag{34}$$

<sup>10</sup>もっと言うておくと、物理学の基本法則は微分方程式で書かれる。微積分でつまずくと物理は全く理解できないことになる。

<sup>11</sup>この式を積分しなさいという問題を出すと、 $v$  を定数として積分しようとする間違いをよく見かける。

なる解を求めることができる。ただし  $B$  は積分定数である。

[別解]

微分方程式 (30) を積分するために、左辺に  $v$  の関数、右辺に  $t$  の関数となるように変数を分離しよう。これは簡単にできて、

$$\frac{dv}{kv + mg} = -\frac{dt}{m}, \quad (35)$$

となる。そして、 $\log$  の微分が  $\frac{d}{dv}(\log |av + b|) = \frac{a}{av + b}$  となることに注意すると、上式は

$$\log |kv + mg| = -\frac{k}{m}t + A, \quad (36)$$

のように積分できる。ここで  $A$  は積分定数である。両辺を指数の肩にのせると

$$kv + mg = A'e^{-\frac{k}{m}t}, \quad (37)$$

を得ることができる。ここで  $A' = \pm e^A$  として絶対値をはずした。以上により  $v(t) = \frac{dz}{dt}$  は

$$\frac{dz}{dt} = \frac{A'}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}, \quad (38)$$

となることが分かる。最後にこの式を積分すると

$$z(t) = -\frac{mA'}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + B, \quad (39)$$

のような解が求まる。

[別解終わり]

初期条件として、 $t = 0$  において  $z(0) = z_0$ 、 $\dot{z}(0) = v_0$  とおくと、運動方程式の解は

$$\begin{aligned} v(t) &= \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}, \\ z(t) &= -\frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + z_0 + \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right), \end{aligned} \quad (40)$$

のように表される。

物体が落下を始めてから一定時間が経過すると、物体の速度は

$$v_f = -\frac{mg}{k}, \quad (41)$$

に限りなく近づく。この速度を終速度と呼ぶ。終速度  $v_f$  は式 (30) から簡単に求めることができる。 $v_f$  は定数なので、これを式 (30) に代入すると

$$0 = -mg - kv_f, \quad (42)$$

を満たす。これを解けば  $v_f = -\frac{mg}{k}$  を得ることができる。仮に空気抵抗が  $-kf(v)$  のように  $v$  の関数で与えられたとしても、終速度を求めることは簡単で

$$0 = -mg - kf(v_f), \quad (43)$$

を解けばよい。雨粒が地表に到達するときには十分終速度に近づいていると考えてよい。雨粒の大きさや形状が同じであれば、終速度はいつも同じ値をとる。空気抵抗のおかげで我々は雨粒に当たっても、たいした衝撃を受けないのである。

問 6 空気抵抗が速度の 2 乗に比例するとしよう。このとき終速度を求めよ。

### 3.4 ばねによる振動

ばね定数  $k$  のばねに質量  $m$  の物体がつながれているとする。ばねの自然長を  $\ell$  とし、物体の位置が  $x$  のときのばねの伸びを  $x - \ell$  とすると、図 2 からわかるように物体はばねから  $-k(x - \ell)$  の力を受ける。すると運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - \ell), \quad (44)$$

のようになる。この方程式の一般解は三角関数の微分の性質より

$$x = \ell + A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad (45)$$

と求まる。さらに初期条件として  $x(0) = \ell + \Delta$ 、 $\dot{x}(0) = 0$  とすると、解は

$$x = \ell + \Delta \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad (46)$$

となる。これは  $x = \ell$  を中心とする周期的な振動を表しており、単振動と呼ばれる。 $x$  の振れ幅  $\Delta$  を振幅と呼ぶ。また、時間については  $x(t + 2\pi\sqrt{m/k}) = x(t)$  となり、 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$  を単振動の周期と呼ぶ。 $\omega = \sqrt{k/m}$  は角振動数と呼ばれる。

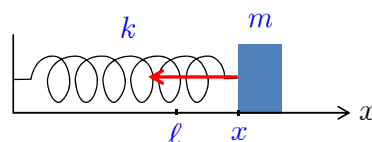


図 2: 単振動

次に、ばねにつながれた物体に摩擦がはたらく場合を考えてみよう。この場合は物体の速度の符号に応じて運動方程式を分けて考える必要がある。すなわち、物体の速度が負の場合には正の方向に動摩擦力がはたらく、物体の速度が正の場合には負の方向に動摩擦力がはたらくので

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k(x - \ell) + \mu' mg & (v < 0), \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k(x - \ell) - \mu' mg & (0 < v), \end{aligned} \quad (47)$$

となる。ただし  $\mu'$  は動摩擦係数である。この方程式より、 $v < 0$  のときは物体は  $x = \ell + \mu' mg/k$  を中心に角振動数  $\sqrt{k/m}$  で単振動し、 $0 < v$  のときは  $x = \ell - \mu' mg/k$  を中心に角振動数  $\sqrt{k/m}$  で単振動する。角振動数は変わらないので、速度  $v$  は  $T/2 = \pi\sqrt{m/k}$  毎に符号が反転することになる。また静摩擦係数を  $\mu (> \mu')$  とすると、 $\ell - \mu mg/k \leq x \leq \ell + \mu mg/k$  の範囲で  $v = 0$  であれば物体は静止し続ける。

初期条件として  $x(0) = \ell + \Delta_0$  ( $\mu mg/k < \Delta_0$ )、 $\dot{x}(0) = 0$  とすると、物体は  $0 \leq t \leq T/2$  で

$$x(t) = \ell + \frac{\mu' mg}{k} + \left( \Delta_0 - \frac{\mu' mg}{k} \right) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (0 \leq t \leq T/2), \quad (48)$$

のように単振動する。そして、 $t = T/2$  のときに物体は位置

$$x(T/2) = \ell - \Delta_1, \quad \Delta_1 = \Delta_0 - \frac{2\mu' mg}{k}, \quad (49)$$

で  $\dot{x}(T/2) = 0$  となる。ここで  $\Delta_1 \leq \mu mg/k$  であれば、物体はここで静止し続ける。一方で  $\mu mg/k < \Delta_1$  であれば、物体は  $T/2 \leq t \leq T$  で

$$x(t) = \ell - \frac{\mu' mg}{k} + \left( \Delta_1 - \frac{\mu' mg}{k} \right) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (T/2 \leq t \leq T), \quad (50)$$

のように単振動する。そして、 $t = T$  のときに物体は位置

$$x(T) = \ell + \Delta_2, \quad \Delta_2 = \Delta_1 - \frac{2\mu' mg}{k}, \quad (51)$$

で  $\dot{x}(T) = 0$  となる。以上を繰り返すと、物体は

$$x(nT/2) = \ell + (-1)^n \Delta_n, \quad \Delta_n = \Delta_0 - \frac{2n\mu' mg}{k}, \quad (52)$$

で反転し、最終的に  $x(nT/2)$  が  $\ell - \mu mg/k \leq x(nT/2) \leq \ell + \mu mg/k$  の範囲に入ったところで静止し続ける。

### 3.5 力学に必要な数学の基礎 3 — 指数関数と三角関数

指数関数と三角関数には密接な関係がある。それを調べるために微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x, \quad (53)$$

を考えよう。解は三角関数の重ね合わせによって

$$x(t) = A \cos t + B \sin t, \quad (54)$$

のように与えられる。 $A, B$  は実数の定数で、 $x(0) = A$ 、 $\dot{x}(0) = B$  となる。

一方で、指数関数の微分は  $\frac{d^2(e^{at})}{dt^2} = a^2 e^{at}$  となるので、 $a^2 = -1$ 、すなわち  $a = \pm i$  であればこれも式 (53) の解となる。一般解は

$$x(t) = (C + iD)e^{it} + (C - iD)e^{-it}, \quad (55)$$

である<sup>12</sup>。ただし、 $C$ 、 $D$ は実数の定数で、 $x(0) = 2C$ 、 $\dot{x}(0) = -2D$ となる。

ここで、式(54)と(55)が等しいことから $A = 2C$ 、 $B = -2D$ となる。よって

$$\begin{aligned} A \cos t + B \sin t &= \frac{1}{2}(A - iB)e^{it} + \frac{1}{2}(A + iB)e^{-it} \\ &= A \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + B \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \end{aligned} \quad (56)$$

となる。 $A$ と $B$ は任意の実数なのでこれらの係数は等しくなり、指数関数と三角関数の関係式

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad (57)$$

が得られる。これより、Eulerの公式

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad (58)$$

が成り立つことがわかる。

三角関数の加法定理は指数関数の積の性質から簡単に示すことができる。

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} \quad (59)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta).$$

また、この式において $\cos \beta = A/\sqrt{A^2 + B^2}$ 、 $\sin \beta = -B/\sqrt{A^2 + B^2}$ と表すと、三角関数の合成の式

$$\sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha + \beta) = A \cos \alpha + B \sin \alpha, \quad \tan \beta = -\frac{B}{A}, \quad (60)$$

を得る。三角関数の積も簡単に求めることができる。例えば

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \\ &= \frac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (61)$$

である。

## 4 2次元空間での物体の運動

ここでは、2次元空間における物体の運動について、運動方程式を解いて考察する。2次元での物体の運動は、円や楕円のように軌道が閉じる場合があり、このような物体の運動は極座標を取って考えると便利である。また、ベクトルの演算についても復習する。

<sup>12</sup> $x$ 、 $y$ を実数とし複素数を $z = x + iy$ と書くと、複素共役は $z^* = x - iy$ で定義される。つまり複素共役は $i$ を $-i$ とする操作である。 $z + z^*$ は実数であり、 $z - z^*$ は純虚数である。 $z = (C + iD)e^{it}$ とすると $z^* = (C - iD)e^{-it}$ となるので、式(55)は実数となる。



#### 4.1 一様重力中における物体の斜方投射

質量  $m$  の物体を一様重力の下で斜方投射したときの物体の運動を解析しよう。地面に水平な空間を  $(x, y)$  平面とし、鉛直上向きを  $z$  軸の正とする。重力加速度の大きさを  $g$  とし、物体は  $y = 0$  にあって、 $y$  軸方向には静止しているとする。すると、物体の位置は  $\mathbf{r} = (x, 0, z)$  であり、物体にはたらく力は  $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$  となるので、Newton の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg, \quad (62)$$

となる。これらの解は既に 3.1 節で求めており、一般解には積分定数が 4 つ現れることになる。斜方投射の初期条件を  $x(0) = z(0) = 0$ 、 $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$ 、 $\dot{z}(0) = v_0 \sin \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) のように与えると、解は

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \theta t, \\ z(t) &= v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2, \end{aligned} \quad (63)$$

のようになる。最初の式から  $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$  となり、これを 2 番目の式に代入して  $t$  を消去すると

$$\begin{aligned} z(x) &= \tan \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \\ &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \left( x - \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}, \end{aligned} \quad (64)$$

を得る。これは物体の軌道を表す式であり、物体は  $x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$  で最高点  $z = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$  に到達し、 $x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$  で  $z = 0$  に至るような放物線を描く。この式が正当化されるような場合、物体を遠くまで飛ばしたい場合には  $\theta = \frac{\pi}{4}$  とすればよいことが予測できる。

斜方投射の初期条件は  $v_0$  と  $\theta$  に依存しているが、ここで  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) を変化させたときに物体が到達できる領域を考えてみよう。それには  $z(x)$  が  $\theta$  の関数としてどのように振る舞うかを調べればよい。式 (64) の  $z$  は  $x$  と  $\theta$  の関数なので  $z(x, \theta)$  と表すことにする。 $z$  を  $\theta$  で偏微分すると<sup>13</sup>、

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -\frac{g \tan \theta}{v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} x \\ &= \frac{x}{\cos^2 \theta} \left( 1 - \frac{g x \tan \theta}{v_0^2} \right), \end{aligned} \quad (65)$$

となる。従って  $z(x, \theta)$  は、 $\theta$  が 0 から増加するにつれて増加し、

$$\tan \theta_m = \frac{v_0^2}{g x}, \quad \cos \theta_m = \frac{g x}{\sqrt{g^2 x^2 + v_0^4}}, \quad (66)$$

<sup>13</sup>一般に関数がいくつかの変数に依存していて、ある 1 つの変数だけを微分する操作を偏微分という。例えば関数  $f(x, y)$  の  $x$  に関する偏微分は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

のように定義される。

を満たす  $\theta_m$  で最大値

$$z(x, \theta_m) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}, \quad (67)$$

をとり、さらに  $\theta$  が増加して  $\frac{\pi}{2}$  になるまでは減少する。このような曲線 (67) を包絡線と呼び、斜方投射の包絡線は放物線を描くことが分かる。夏の花火大会で花火が描く領域の境界は、残光が長く残るといった気象条件が整えば、放物線のように見えるかもしれない。

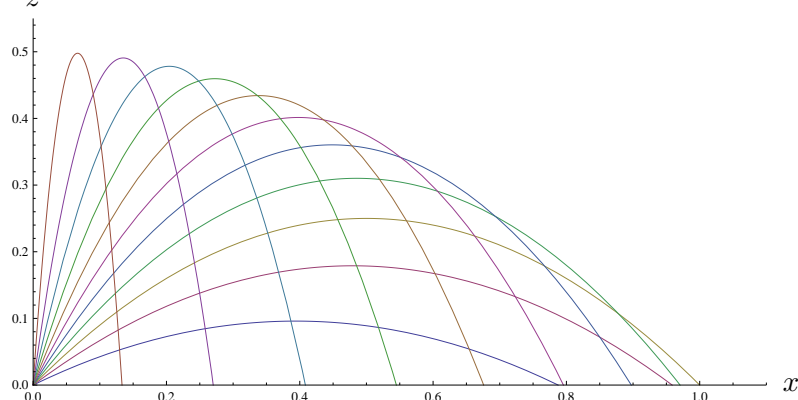


図 3: 斜方投射の軌道。  $v_0^2 = g$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{12}}$  ( $n = 1, \dots, 11$ ) とした。上方投射で高さ  $\frac{v_0^2}{2g} = 0.5$  までボールを投げられる人は、うまくやれば ( $n = 3$ ) 距離  $\frac{v_0^2}{g} = 1$  までボールをノーバウンドで投げることができる。ちなみにこの図は Mathematica という数値処理ソフトを利用して作成した。

## 4.2 一様重力中における空気抵抗があるときの物体の斜方投射

前節に引き続き、一様重力中における速度に比例する空気抵抗のある場合の、物体の運動を考えよう。地面に水平な空間を  $(x, y)$  平面とし、鉛直上向きを  $z$  軸の正とする。重力加速度の大きさを  $g$  とし、物体は  $y = 0$  にあって、 $y$  軸方向には静止しているとする。すると、物体の位置は  $\mathbf{r} = (x, 0, z)$  であり、物体にはたらく力は  $\mathbf{F} = (0, 0, -mg) - k\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  となるので、Newton の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - k\frac{dz}{dt}, \quad (68)$$

となる。これらの解は既に 3.3 節で求めており、一般解には積分定数が 4 つ現れることになる。初期条件を  $x(0) = z(0) = 0$ 、 $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$ 、 $\dot{z}(0) = v_0 \sin \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) のように与えると、解は

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{m}{k}v_0 \cos \theta(1 - e^{-\frac{k}{m}t}), \\ z(t) &= \frac{m}{k}\left(v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k}\right)(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k}t, \end{aligned} \quad (69)$$

のようになる。これより  $x$  の取りうる範囲は  $0 \leq x \leq \frac{mv_0 \cos \theta}{k}$  となることが分かる。最初の式から  $1 - e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{kx}{mv_0 \cos \theta}$ 、 $t = -\frac{m}{k} \log \left(1 - \frac{kx}{mv_0 \cos \theta}\right)$  となり、これを 2 番目の式に代入して  $t$  を消去すると物体の軌道を表す式

$$z(x) = \left( \tan \theta + \frac{mg}{kv_0 \cos \theta} \right) x + \frac{m^2 g}{k^2} \log \left( 1 - \frac{kx}{mv_0 \cos \theta} \right), \quad (70)$$

を得る。 $z$  を  $x$  で微分すると

$$\frac{dz}{dx} = \frac{mg}{kv_0 \cos \theta} \left( 1 + \frac{kv_0}{mg} \sin \theta \right) - \frac{mg}{kv_0 \cos \theta} \frac{1}{1 - \frac{kx}{mv_0 \cos \theta}}, \quad (71)$$

となるので、 $0 \leq x \leq \frac{mv_0 \cos \theta}{k}$  の範囲で  $x$  が増加すると、 $z$  は単調増加して最大となり単調減少をする関数であることが分かる。そして、物体は  $x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \left( 1 + \frac{kv_0 \sin \theta}{mg} \right)^{-1}$  で最高点  $z = \frac{mv_0 \sin \theta}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \log \left( 1 + \frac{kv_0 \sin \theta}{mg} \right)$  に到達する。物体が再び  $z = 0$  をよぎるときの  $x$  を求めたり、包絡線の式を求めるのは面倒であり、初等関数では表せない。

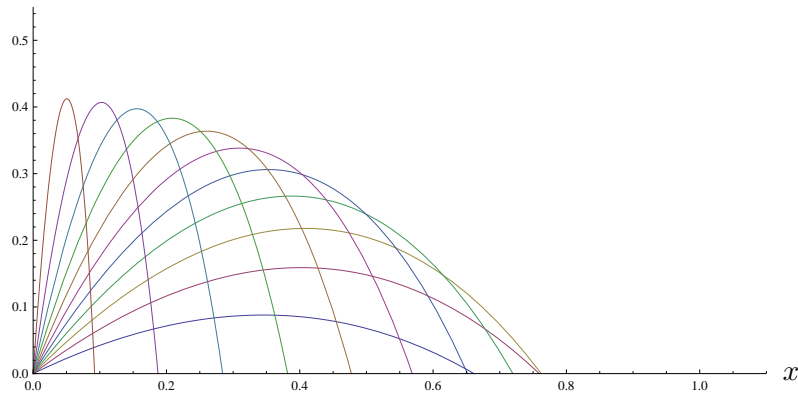


図 4: 速度に比例する空気抵抗がある場合の斜方投射の軌道。 $v_0^2 = g$ 、 $\frac{k}{m} = 1$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{12}}$  ( $n = 1, \dots, 11$ ) とした。物体が到達できる領域は  $0 \leq x \leq \frac{mv_0}{k}$  なので、包絡線は放物線にはならない。

### 4.3 力学に必要な数学の基礎 4 — Taylor 展開

ある関数  $f(x)$  があつたときに、その関数が  $x = x_0$  付近でどのように振る舞うかを調べよう。 $f(x)$  は  $x = x_0$  のときは  $f(x_0)$  なので、 $x$  が  $x_0$  から少しだけずれたときは

$$f(x) = f(x_0) + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (72)$$

のように  $(x - x_0)$  のべきで展開できると考えるのは自然であろう。では係数  $c_n$  はどのような値になるだろうか。これを考えるために、式 (72) の両辺を  $n$  回だけ微分すると

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(x - x_0) + \dots, \quad (73)$$

となる。ここで  $f$  の右肩に  $(n)$  と書いたが、これは  $f$  の  $n$  階微分を表す。この式において  $x = x_0$  とすると

$$f^{(n)}(x_0) = n!c_n, \quad (74)$$

を得る。よって  $f(x)$  を  $x = x_0$  のまわりでべき展開できるとすると、その形は

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots, \quad (75)$$

のように書ける。これを関数  $f(x)$  の  $x = x_0$  まわりでのテイラー展開という<sup>14</sup>。

初等関数などの  $x = 0$  まわりでのテイラー展開は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \\ \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots, \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots, \\ (1+x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots, \end{aligned} \quad (76)$$

テイラー展開の式を使えば、やはり Euler の公式 (58) が成り立つことを確認できる。実際

$$\begin{aligned} \cos \theta + i \sin \theta &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + \cdots\right) \\ &\quad + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} + \cdots\right) \\ &= 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(i\theta)^n + \cdots \\ &= e^{i\theta}, \end{aligned} \quad (77)$$

である。

テイラー展開の具体的な活用例として、式 (69) と式 (70) を考えよう。 $\frac{k}{m}t$  が十分小さいとすると、 $e^{-\frac{k}{m}t} \sim 1 - \frac{k}{m}t + \frac{k^2}{2m^2}t^2$  なので、式 (69) に代入すると

$$\begin{aligned} x(t) &\sim v_0 \cos \theta t - \frac{kv_0 \cos \theta}{2m}t^2, \\ z(t) &\sim v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{kv_0 \sin \theta}{2m}t^2, \end{aligned} \quad (78)$$

<sup>14</sup> $x = 0$  のまわりでの展開はマクローリン展開というが、物理の教科書では  $x = 0$  も含めてテイラー展開と呼ぶことが多い。

と近似できる。これは式 (63) に  $\frac{k}{m}$  に比例する補正項が入った形になっていると理解できる。また、

$$\log\left(1 - \frac{kx}{mv_0 \cos \theta}\right) \sim -\frac{k}{mv_0 \cos \theta}x - \frac{k^2}{2m^2v_0^2 \cos^2 \theta}x^2 - \frac{k^3}{3m^3v_0^3 \cos^3 \theta}x^3, \quad (79)$$

のように展開できるので、これを式 (70) に代入すると

$$\begin{aligned} z(x) &\sim \tan \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}x^2 - \frac{kg}{3mv_0^3 \cos^3 \theta}x^3 \\ &= -\frac{kg}{3mv_0^3 \cos^3 \theta}x \left\{ x - \frac{3mv_0 \cos \theta}{4k} \left( \left(1 + \frac{16kv_0 \sin \theta}{3mg}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ x + \frac{3mv_0 \cos \theta}{4k} \left( \left(1 + \frac{16kv_0 \sin \theta}{3mg}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (80)$$

のように近似できる。これも式 (64) に  $\frac{k}{m}$  に比例する補正項が入った形になっていると理解できる。この式より、 $\frac{k}{m}$  の 1 次の項までで近似すると、物体が再び  $z = 0$  をよぎるのは

$$x = \frac{3mv_0 \cos \theta}{4k} \left( \left(1 + \frac{16kv_0 \sin \theta}{3mg}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \sim \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} - \frac{4kv_0^3 \sin \theta \sin 2\theta}{3mg^2}, \quad (81)$$

においてであると評価できる。このように物理においてはテイラー展開はよく使う手法であり、パラメータが十分小さいときに物体の運動を近似的に理解する際には威力を発揮する。

問 7  $\arcsin x$  および  $\arccos x$  をテイラー展開して  $x^3$  の項まで求めよ。

#### 4.4 一様磁場中の荷電粒子の運動

ここでは物体が円軌道のような閉じた軌道を描く場合の運動について考察する。具体的には、質量  $m$ 、電荷  $q$  をもつ荷電粒子が、 $z$  軸正の方向に一様磁場

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad (82)$$

がかかっている中で、 $(x, y)$  平面内で運動する状況を考える。このとき荷電粒子には、Lorentz 力

$$\mathbf{F} = qB \begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ -\frac{dx}{dt} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (83)$$

がはたらく。Lorentz 力の大きさは  $|\mathbf{F}| = q|\dot{\mathbf{r}}|B$  である。また、 $\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{B} = 0$  なので、Lorentz 力の向きは磁場と速度ベクトルに対して垂直であることがわかる。荷電粒子は  $z = 0$  の面内で運動すると仮定すると、荷電粒子に対する Newton の運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = qB \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -qB \frac{dx}{dt}, \quad (84)$$

のように与えられる。これらの式は簡単に積分できて

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qB}{m}(y - \beta), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{qB}{m}(x - \alpha), \quad (85)$$

を得ることができる。ここで  $\alpha$  と  $\beta$  は積分定数である。これらを式 (84) に代入すると、 $x$  と  $y$  が分離した微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2(x - \alpha), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2(y - \beta), \quad (86)$$

を得る。従って  $x$  と  $y$  は角振動数  $\frac{qB}{m}$  の単振動の解となり、式 (84) の一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha + A \sin\left(\frac{qB}{m}t + \delta\right), \\ y(t) &= \beta + A \cos\left(\frac{qB}{m}t + \delta\right), \end{aligned} \quad (87)$$

となることが分かる。

初期条件として  $x(0) = x_0$ 、 $y(0) = y_0 + \frac{mv_0}{qB}$ 、 $\dot{x}(0) = v_0$ 、 $\dot{y}(0) = 0$  とすると、荷電粒子の位置は

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{mv_0}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right), \\ y(t) &= y_0 + \frac{mv_0}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right), \end{aligned} \quad (88)$$

となる。よって、荷電粒子は  $(x_0, y_0)$  を中心とする半径  $\frac{mv_0}{qB}$  の円周上を、速さ  $v_0$  で時計回りに運動する。

問 8  $\dot{r}$ 、 $B$  および  $F$  を図示せよ。

#### 4.5 2次元直交座標と極座標

2次元空間のベクトルを記述するのに、我々はこれまでに直交座標を用いてきた。例えば物体の位置を表すベクトル  $\mathbf{r}$  は

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2, \quad (89)$$

のように表すことができる。ここで

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (90)$$

は直交座標の基底ベクトルで、それぞれ  $x$  軸および  $y$  軸方向の単位ベクトルとなっている。

一方で、物体に中心力がはたらくときの運動を解析する際には、極座標を用いると便利である。2次元の極座標は動径方向  $r$  と角度方向  $\theta$  で指定され、 $x$  および  $y$  とは

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (91)$$

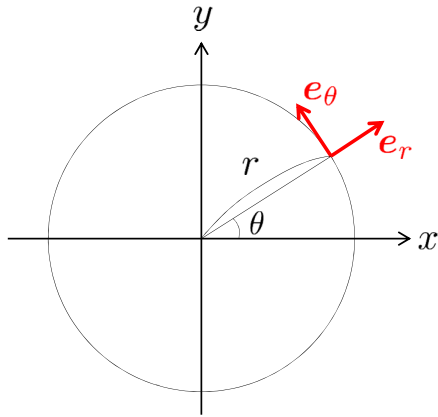


図 5: 極座標

のような関係にある。極座標における基底ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\theta &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (92)$$

で与えられる。これらを用いると、物体の位置は  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$  と書くことができる。

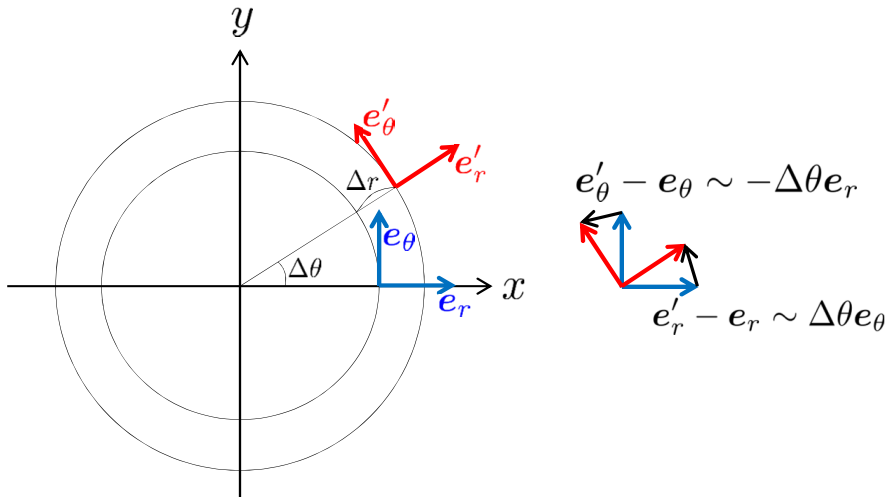


図 6: 極座標における基底ベクトルの微小変化。物体は  $\Delta t$  の間に動径方向に  $\Delta r$ 、角度方向に  $\Delta \theta$  だけ移動している。

物体の位置は時間とともに変化するの、極座標においては基底ベクトルも変化するこ

となる。(図6参照。)  $\theta(t)$  が時間に依存すると考えると、基底ベクトルの時間微分は

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_r &= -\sin\theta\dot{\theta}\mathbf{e}_1 + \cos\theta\dot{\theta}\mathbf{e}_2 = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\cos\theta\dot{\theta}\mathbf{e}_1 - \sin\theta\dot{\theta}\mathbf{e}_2 = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r,\end{aligned}\tag{93}$$

となる。これより、物体の速度と加速度は

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta,\end{aligned}\tag{94}$$

のように表される。質量  $m$  の物体に中心力のみがはたらく場合には、 $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$  となるので運動方程式は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta = F(r)\mathbf{e}_r,\tag{95}$$

となる。成分ごとに表示すると

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r),\tag{96}$$

$$L = mr^2\dot{\theta},\tag{97}$$

である。最初の式の  $mr\dot{\theta}^2$  は遠心力に相当する。 $L$  は積分定数であり、角運動量と呼ばれる<sup>15</sup>。

前節の荷電粒子の運動を極座標で再考してみよう。荷電粒子にはたらく Lorentz 力を極座標で表示すると

$$\mathbf{F} = qB \begin{pmatrix} \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} = qBr\dot{\theta}\mathbf{e}_r - qB\dot{r}\mathbf{e}_\theta,\tag{98}$$

のようになる。これより Lorentz 力は中心力ではないことが分かるが、式(88)より座標の原点を円運動の中心  $(x_0, y_0)$  に選べば、 $\dot{r} = 0$  とできるので角運動量  $L$  が保存する。実際解を使って  $L$  を評価すると、 $L = \frac{m^2v_0^2}{qB}$  なので定数となることが分かる。

問 9  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta$  を計算せよ。また、 $\mathbf{e}_r \cdot \ddot{\mathbf{r}}$  および  $\mathbf{e}_\theta \cdot \ddot{\mathbf{r}}$  を計算せよ。

#### 4.6 単振り子の運動

図7のように、長さ  $l$  の棒と質量  $m$  の物体からなる単振り子の運動を極座標を用いて考えよう。

棒の張力を  $T$  すると、物体にはたらく力は  $\mathbf{F} = (mg\cos\theta - T)\mathbf{e}_r - mg\sin\theta\mathbf{e}_\theta$  なので、Newton の運動方程式は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta = (mg\cos\theta - T)\mathbf{e}_r - mg\sin\theta\mathbf{e}_\theta,\tag{99}$$

<sup>15</sup>後述するが角運動量はベクトルである。ここでは角運動量の  $z$  方向の成分を考えていることになる。



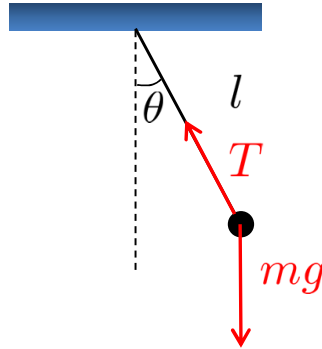


図 7: 単振り子

のように与えられる。この式が成り立つためには  $e_r$  と  $e_\theta$  の係数がそれぞれ等しくなる必要がある<sup>16</sup>。さらに棒の長さは  $l$  なので  $r = l$  である。よって運動方程式は

$$ml\dot{\theta}^2 = T - mg \cos \theta, \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta, \quad (100)$$

となる。2番目の式に  $ml^2\dot{\theta}$  をかけて積分を実行すると、

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = E, \quad (101)$$

を得る。 $E$  は積分定数であるが、これは高校物理で習ったエネルギー保存の式を表している。積分定数は時間によらないので、保存量を与えるのである。逆に言うと、保存する量が分かれば運動方程式の積分は実行できることになる。保存則については後で詳細に述べる。

初期条件として  $\theta(0) = \theta_0$ 、 $\dot{\theta}(0) = 0$  とすると、解は

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = -mgl \cos \theta_0, \quad (102)$$

を満たすことが分かる。これを (100) の 1 番目の式に代入すると

$$T = 3mg \cos \theta - 2mg \cos \theta_0, \quad (103)$$

となることが分かる。式 (102) を積分できれば  $\theta(t)$  が求まるのだが、実際にそれを初等関数で表すことはできない。それでも式 (102) は物体の運動について有用な情報を与えてくれる。縦軸をエネルギーとし横軸を  $\theta$  として、ポテンシャルエネルギー  $V = -mgl \cos \theta$  の関数と  $E = \text{一定}$  の線を描くと図 8 のようになる。物体はグラフにおいて、 $E = \text{一定}$  の線上を運動することになるが、 $0 \leq E - V$  なる制限があることに注意すると、物体は  $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$  の範囲を運動することが分かる。

最後に式 (102) から単振り子の周期  $T$  を導出しよう。変数分離は簡単に実行できて

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} dt, \quad (104)$$

<sup>16</sup> $e_r$  と  $e_\theta$  は 1 次 (線形) 独立である。

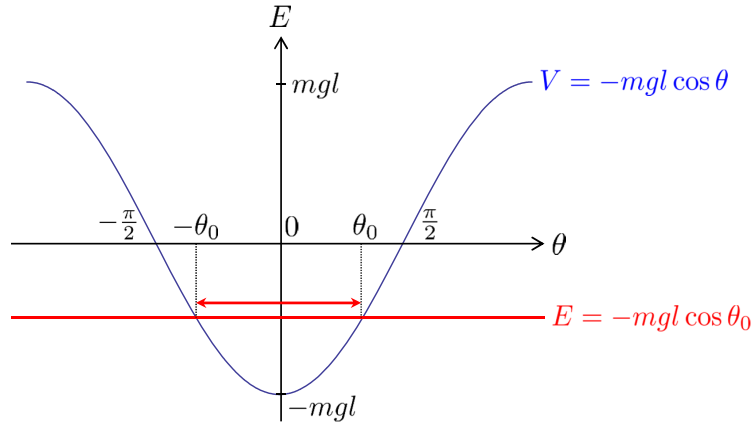


図 8: 単振り子のポテンシャル図

となる。 $\theta$  が  $\theta_0$  から  $0$  へ変化するとき上式は負符号をとり、この間に時間は  $T/4$  だけ経過するので

$$\begin{aligned}
 T &= 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \\
 &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \\
 &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2} \sin^2\phi}}, \tag{105}
 \end{aligned}$$

のように与えられる。ただし 3 行目に変形するとき、 $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2} \sin\phi$  と変数変換を行った。この積分は実は楕円関数を使って書かれるもので、初等関数を用いて表すことはできない。そこで、 $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$  を使って積分を展開して評価すると

$$\begin{aligned}
 T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2\frac{\theta_0}{2} \sin^2\phi + \frac{3}{8} \sin^4\frac{\theta_0}{2} \sin^4\phi + \dots \right) \\
 &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4\frac{\theta_0}{2} + \dots \right), \tag{106}
 \end{aligned}$$

のようになる。仮に  $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$  とすると  $\sin\frac{\pi}{12} \sim 0.26$  なので、 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + 0.017 + 0.00063 + \dots)$  となり、展開の 2 項目以降はほとんど寄与しないことが分かる。振り子の周期は  $\theta_0$  によらず  $T \sim 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  と近似でき、これは振り子の等時性を意味する。しかし  $\theta_0$  が大きくなるにつれて、展開の 2 項目以降の寄与も大きくなり、振り子の等時性は成り立たなくなる。

問 10 振り子が  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  で振れるためには、 $\theta = 0$  での物体の速さをどのように調整すればよいかを答えよ。

## 5 2体問題における惑星の運動

太陽と惑星は万有引力の法則に従って互いに力をおよぼしながら運動している。太陽系の惑星は水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星および海王星であるが、ここでは簡単のために、例えば太陽と地球の2体のみの運動について考えることにする。これは2体問題と呼ばれる。

この節では、太陽の周りを公転する惑星の運動を Newton の運動方程式を解いて解析する。その結果、当時知られていた Kepler の法則は全て説明できることを説明する。力学があらゆる学問に先んじて不動の地位を確立した、金字塔といえる結果である。

### 5.1 2体問題における重心運動と相対運動

質量  $m_1$  の物体 1 が位置  $\mathbf{r}_1$  にあり、質量  $m_2$  の物体 2 が位置  $\mathbf{r}_2$  にあるとする。物体 1 と物体 2 には相互作用によって、それぞれ力  $\mathbf{F}_{12}$  および  $\mathbf{F}_{21}$  が作用反作用の法則を満たすように加わっているとす。さらに、これ以外に物体 1 には外力  $\mathbf{F}_1$ 、物体 2 には外力  $\mathbf{F}_2$  が加わっているとしよう。このとき物体 1 と物体 2 に関する運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1, \quad (107)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2, \quad (108)$$

のようになる。

この式を解くにあたって、まず  $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$  となることに注目しよう。式 (107) と式 (108) を足しあげると

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (109)$$

となる。従って、2体の物体の重心ベクトルを

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (110)$$

のように定義すると、重心座標に関する運動方程式

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (111)$$

が得られる。これは全質量が重心にあって、外力の和による力を受けて運動する式とみなすことができる。もし外力がはたらいっていない場合には、物体の重心は等速直線運動をすることが分かる。

次に、式 (107) を  $m_1$  で割った式から式 (108) を  $m_2$  で割った式を引くと

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}_{12} + \frac{1}{m_1}\mathbf{F}_1 - \frac{1}{m_2}\mathbf{F}_2, \quad (112)$$

を得る。そこで、相対位置ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  および換算質量  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  を導入すると、上式は

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{F}_1 - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{F}_2, \quad (113)$$

のように書き表される。特に、 $\frac{\mu}{m_1} \mathbf{F}_1 = \frac{\mu}{m_2} \mathbf{F}_2$  の場合には、相対位置の運動は換算質量と相互作用によって決定され、運動方程式は

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{12}, \quad (114)$$

となることが分かる。

## 5.2 Kepler の法則

16 世紀後半に Brahe は天体観測を詳細に行い、惑星の運動に関する膨大なデータを収集した<sup>17</sup>。そして、17 世紀前半に Kepler は Brahe の観測データを解析して、太陽を公転する惑星の運動は以下の 3 つの法則に従うことを発見した。

**第 1 法則:** 惑星は太陽を焦点とする楕円軌道を描く。

**第 2 法則:** 惑星と太陽を結ぶ線分がはく単位時間あたりの面積は一定である。

**第 3 法則:** 惑星の公転周期は (楕円軌道の長軸の長さ)<sup>3/2</sup> に比例する。

当時は地球を中心として惑星の運動を考える天動説が主流であったが、それでは惑星の運動は複雑でなかなか理解するのが難しい。しかし、Kepler の法則は地球も惑星であり、太陽を中心として惑星の運動を考える地動説を採用すると、惑星の運動には単純な法則が浮かび上がってくることを示している。天動説から地動説への転換は、従来の概念を観測と論理的考察によって覆し新たな概念を生み出したという点で、近代科学の幕開けといってもよいものである。そして、Kepler の法則は Newton によって万有引力の法則へと昇華されることになる。

## 5.3 惑星の運動

惑星の質量を  $m_1$  とし、太陽の質量を  $m_2$  としよう。惑星と太陽の間には万有引力のみがはたらいており、これは外力がない場合の 2 体問題である。従って、惑星と太陽の重心は等速直線運動をする。以下では相対運動に関する運動方程式

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (115)$$

<sup>17</sup>Brahe の観測は肉眼によるものである。16 世紀末から 17 世紀初頭にかけて望遠鏡が発明され、天体の観測精度が劇的に向上することとなった。

を考えよう。力は中心力なので、これを解くにあたっては極座標を用いるのが便利である。惑星と太陽の相対位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を極座標  $(r, \theta)$  で表すと、運動方程式は

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (116)$$

のように書き表される。成分ごとの方程式は

$$\mu\ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (117)$$

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}, \quad (118)$$

となる。ここで  $L$  は積分定数であるが、この式は惑星の面積速度

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r (r \dot{\theta}) = \frac{L}{2\mu}, \quad (119)$$

が時間によらない定数であることを表している。これでまず、Kepler の第2法則を運動方程式から説明することができた。

式(118)より  $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$  なので、これを式(117)に代入すると

$$\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} + \frac{Gm_1 m_2}{r^2} = 0, \quad (120)$$

を得る。さらにこの式に  $\dot{r}$  をかけて積分をすると

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1 m_2}{r} = E, \quad (121)$$

となる。ここで  $E$  は積分定数であり、惑星と太陽の相対運動に関するエネルギーを表す。この式をさらに積分できれば  $r(t)$  が求まるが、残念ながらそれは初等関数で表すことはできない。それでも式(121)は惑星と太陽の相対運動に関して有益な情報を与えてくれる。縦軸をエネルギーとし横軸を  $r$  として、ポテンシャルエネルギー

$$V(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1 m_2}{r}, \quad (122)$$

の関数と  $E = \text{一定}$  の線を描くと図9のようになる。 $\frac{dV}{dr} = -\frac{L^2}{\mu r^3} + \frac{Gm_1 m_2}{r^2} = 0$  となるのは、 $r$  が

$$R \equiv \frac{L^2}{Gm_1 m_2 \mu}, \quad (123)$$

の値をとるときであり、このとき  $V$  は最低値  $-V_0$  をとる。ただし

$$V_0 \equiv \frac{L^2}{2\mu R^2}, \quad (124)$$

とした。物体はグラフにおいて、 $E = \text{一定}$  の線上を運動することになるが、 $0 \leq E - V$  なる制限があることに注意すると、 $E$  の値に応じて物体が取りうる  $r$  の範囲が変化することが分かる。 $E = -V_0$  のときは  $r = R$  となるので、惑星と太陽の相対位置は円軌道をとる

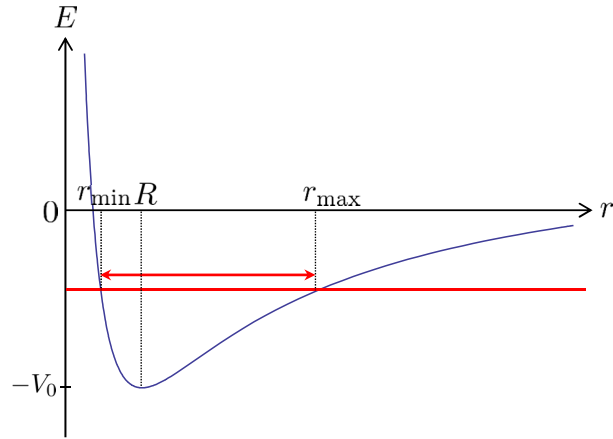


図 9: 惑星と太陽の相対運動に関するポテンシャル図

ことになる。 $-V_0 < E < 0$  のときは、相対距離は  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  の範囲を往復する。そして  $0 \leq E$  のときは、惑星は惑星とはならず無限のかなたへ飛び去ってしまう。

それでは惑星と太陽の相対運動についておおよそのイメージができたので、その軌道について詳細に検討することにしよう。 $\dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta}$  を式 (121) に代入すると

$$\frac{L^2}{2\mu r^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1 m_2}{r} = E \Leftrightarrow \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{Er^4}{V_0 R^2} + \frac{2r^3}{R} - r^2, \quad (125)$$

となる。ただし式 (123) と (124) を用いた。この微分方程式を解くために  $u = \frac{1}{r}$  のような変数変換を行う。すると  $u$  についての微分方程式

$$\begin{aligned} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 &= \frac{E}{V_0 R^2} + \frac{2u}{R} - u^2 \\ &= \frac{E}{V_0 R^2} + \frac{1}{R^2} - \left( u - \frac{1}{R} \right)^2, \end{aligned} \quad (126)$$

が得られる。よって解は

$$u = \frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{E}{V_0 R^2}} \cos(\theta + \theta_0), \quad (127)$$

となる。 $\theta_0$  は積分定数であるが、これは角度  $\theta$  を再定義することで吸収することができるので、以下では  $\theta_0 = 0$  とする。すると惑星と太陽の相対軌道を表す式は

$$r = \frac{R}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad \epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{E}{V_0}}, \quad (128)$$

のように表される。 $\epsilon$  は離心率と呼ばれる無次元のパラメータである。この式より、図 9 を基に考察した物体の軌道が正しいことが確認できる。すなわち、 $E = -V_0$  のときは  $\epsilon = 0$  となって惑星と太陽の相対軌道は円を描く。 $-V_0 < E < 0$  のときは  $0 < \epsilon < 1$  となって、惑星と太陽の相対距離は  $r_{\min} = \frac{R}{1+\epsilon} \leq r \leq r_{\max} = \frac{R}{1-\epsilon}$  の間を往復する。次節でみるように、これは楕円軌道となる。そして、 $0 \leq E$  のときは  $1 \leq \epsilon$  となって、惑星と太陽の相対軌道は  $r = r_{\min}$  まで最接近するが、やがて無限のかなたへと飛び去ってしまう。

## 5.4 楕円、放物線および双曲線の軌道について

惑星と太陽の相対軌道は式 (128) で与えられることが分かった。そして、その軌道は離心率  $\epsilon$  の値に応じて大きく異なることもみた。この節では相対軌道の幾何的な性質についてより詳細に解析していこう。そのために、式 (128) を直交座標  $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$  を用いて書き直すとしよう。式 (128) の分母をはらい、少しずつ丁寧に変形を施していくと

$$\begin{aligned}
 r + \epsilon r \cos \theta &= R \\
 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} &= R - \epsilon x \\
 \Rightarrow x^2 + y^2 &= R^2 - 2R\epsilon x + \epsilon^2 x^2 \\
 \Leftrightarrow (1 - \epsilon^2)x^2 + 2R\epsilon x + y^2 &= R^2 \\
 \Leftrightarrow (1 - \epsilon^2)\left(x + \frac{R\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + y^2 &= \frac{R^2}{1 - \epsilon^2} \\
 \Leftrightarrow (1 - \epsilon^2)^2\left(x + \frac{R\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + (1 - \epsilon^2)y^2 &= R^2, \tag{129}
 \end{aligned}$$

のようになる<sup>18</sup>。以下では  $\epsilon$  の値で場合分けして、軌道の幾何学的性質を考察する。

まず離心率  $\epsilon = 0$  の場合を考えよう。式 (129) より

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1, \tag{131}$$

となるので、これは半径  $R$  の円軌道を表す。

次に離心率が  $0 < \epsilon < 1$  の場合を考えよう。このとき軌道の式 (129) は

$$\frac{\left(x + \frac{R\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a = \frac{R}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{R}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \tag{132}$$

のようになる。これは長軸の長さを  $2a$ 、短軸の長さを  $2b$  とし、中心が  $\left(-\frac{R\epsilon}{1 - \epsilon^2}, 0\right)$  に位置する楕円であり、図 10 のように描かれる。従って、Kepler の第 1 法則は Newton の運動方程式から説明できたことになる。例えば、地球は  $\epsilon = 0.017$  で円軌道に近い楕円軌道を描き、ハレー彗星は  $\epsilon = 0.97$  でかなりひしゃげた楕円軌道をとる。式 (118) より、 $0 < L$  のとき惑星は太陽のまわりを反時計回りに公転する。

Kepler の第 3 法則も示しておこう。楕円の面積は

$$S_{\text{楕円}} = \pi ab = \frac{\pi R^2}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} = \pi R^{1/2} a^{3/2}, \tag{133}$$

のように与えられるので、面積速度一定の式 (119) を積分すると、惑星と太陽の相対運動の周期  $T$  は

$$T = \frac{2\mu}{L} S_{\text{楕円}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2}, \tag{134}$$

<sup>18</sup>式変形の 2 行目から 3 行目に注目すると、 $\sqrt{x^2 + y^2} = -R + \epsilon x$  も同様の式を満足することが分かる。これは

$$r = \frac{R}{\epsilon \cos \theta - 1}, \tag{130}$$

の軌道を与える。 $1 < \epsilon$  のときはこの軌道は双曲線の片割れを表す。次節を参照のこと。

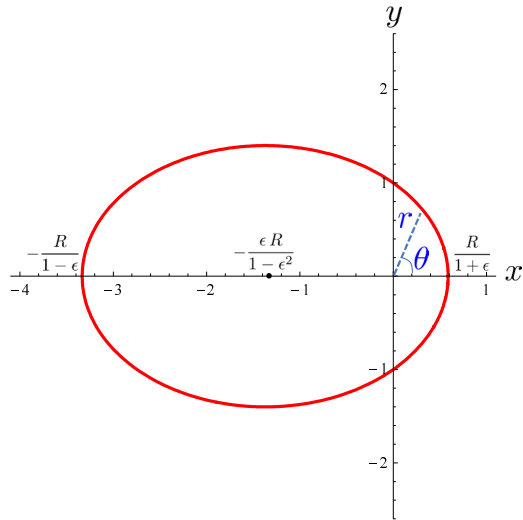


図 10:  $R = 1$ 、 $\epsilon = 0.7$  の楕円。太陽は楕円の焦点である原点にある。

となる。ただしここで  $\mu$  と  $R$  のあらわな表式を代入した。この式は、惑星と太陽の相対運動の周期が (楕円軌道の長軸の長さ) $^{\frac{3}{2}}$  に比例するという Kepler の第 3 法則を見事に説明する。従って、惑星の公転運動に関する Kepler の 3 法則は、Newton の運動方程式と万有引力の法則から完璧に導出できるのである。

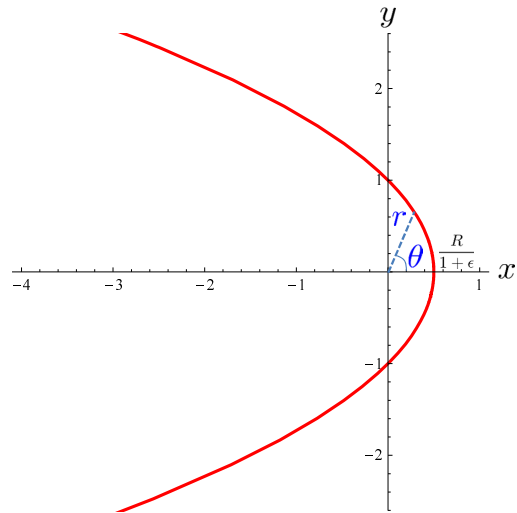


図 11:  $R = 1$ 、 $\epsilon = 1$  の放物線。太陽は原点にある。

次に離心率が  $\epsilon = 1$  の場合を考えよう。軌道の式 (129) の 4 行目より

$$x = -\frac{y^2}{2R} + \frac{R}{2}, \quad (135)$$

となる。これは放物線であり、図示すると図 11 のようになる。式 (118) より、 $0 < L$  のと



き物体は太陽のまわりを反時計回りに周回して無限遠方へ飛び去る。

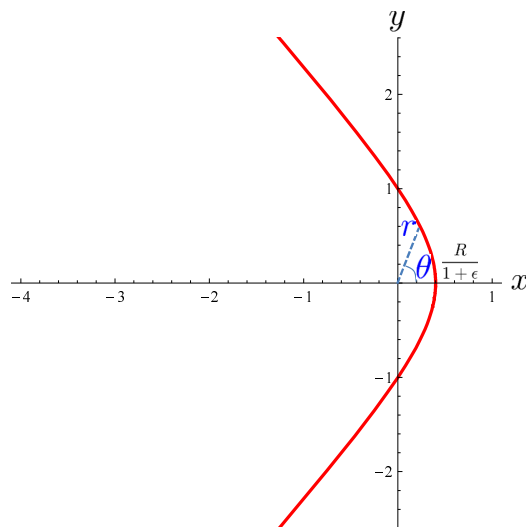


図 12:  $R = 1$ 、 $\epsilon = 1.5$  の双曲線。太陽は原点にある。

最後に離心率が  $1 < \epsilon$  の場合を考察する。このとき軌道の式 (129) は

$$\frac{\left(x - \frac{R\epsilon}{\epsilon^2 - 1}\right)^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1, \quad c = \frac{R}{\epsilon^2 - 1}, \quad d = \frac{R}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}, \quad (136)$$

のようになる。従って  $1 < \epsilon$  の場合の軌道は双曲線であり、それを図示すると図 12 のようになる。式 (118) より、 $0 < L$  のとき物体は  $y = \frac{d}{c}\left(x - \frac{R\epsilon}{\epsilon^2 - 1}\right)$  に沿って進入し、太陽のまわりを反時計回りに周回して、 $y = -\frac{d}{c}\left(x - \frac{R\epsilon}{\epsilon^2 - 1}\right)$  に沿って無限遠方へ飛び去る。この軌道の応用としては、以下のような人工衛星のスイングバイがよく行われている。人工衛星の向きを燃料を使うことなく変えたい場合には、人工衛星が惑星近傍を通るように設定すれば、素朴には双曲線軌道によって飛行方向を変えることができる。惑星の公転速度を考慮すると、人工衛星の速度を上げたり下げたりすることも可能である。

## 5.5 力学に必要な数学の基礎 5 — 双曲線関数

前節では、離心率  $\epsilon$  の値に応じて物体の軌道が楕円、放物線および双曲線となることをみた。原点を中心とする楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (137)$$

で与えられるので、三角関数を用いて

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad (138)$$

とおけば、楕円の方程式を満たすことはすぐに確認できる。

一方で原点を中心とする双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1, \quad (139)$$

で与えられる。ではこの式も楕円のように単純な式で表すことができるだろうか？素朴には  $x = c \cos \theta$ 、 $y = -id \sin \theta$  とすれば上式を満たす。ここで  $i$  は虚数を表す。しかしこれでは  $\theta$  を実数とすると  $y$  は純虚数になってしまう。そこで、 $\eta$  を実数として  $\theta = i\eta$  とおくことにすると

$$x = c \cos(i\eta), \quad y = -id \sin(i\eta), \quad (140)$$

となって、 $x$  と  $y$  は実数になり式 (139) を満たす。そこで、Euler の公式 (58) を使って双曲線関数を

$$\begin{aligned} \cosh \eta &\equiv \cos(i\eta) = \frac{1}{2}(e^\eta + e^{-\eta}), \\ \sinh \eta &\equiv -i \sin(i\eta) = \frac{1}{2}(e^\eta - e^{-\eta}), \\ \tanh \eta &\equiv \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} = \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{e^\eta + e^{-\eta}}, \end{aligned} \quad (141)$$

のように定義しよう。双曲線関数を図に表すと図 13 のようになる。

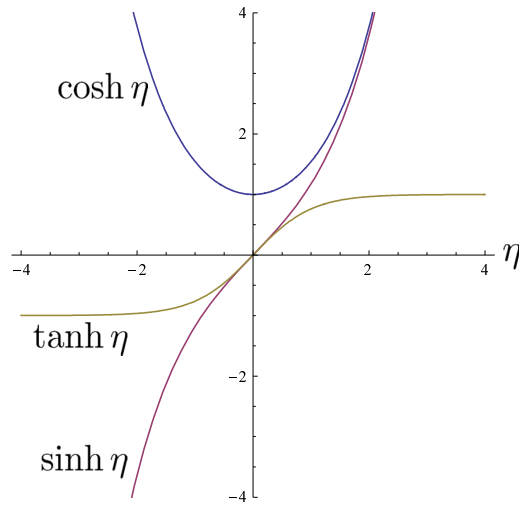


図 13:  $\cosh \eta$ 、 $\sinh \eta$  および  $\tanh \eta$ 。

定義式からわかるように、双曲線関数は

$$\begin{aligned} \cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta &= 1, & \frac{d}{d\eta} \cosh \eta &= \sinh \eta, \\ \frac{d}{d\eta} \sinh \eta &= \cosh \eta, & \frac{d}{d\eta} \tanh \eta &= \frac{1}{\cosh^2 \eta}, \end{aligned} \quad (142)$$

などを満たす。また、双曲線関数を  $\eta = 0$  のまわりで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned}\cosh \eta &= 1 + \frac{1}{2!}\eta^2 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}\eta^{2n} + \cdots, \\ \sinh \eta &= \eta + \frac{1}{3!}\eta^3 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}\eta^{2n+1} + \cdots,\end{aligned}\tag{143}$$

のようになる。

結局、双曲線関数を用いると式 (139) は

$$x = \pm c \cosh \eta, \quad y = d \sinh \eta,\tag{144}$$

のように表される。(図 14 参照。) これは  $y$  軸を中心に線対称となるような 2 本の曲線を表すので、双曲線と呼ばれる。

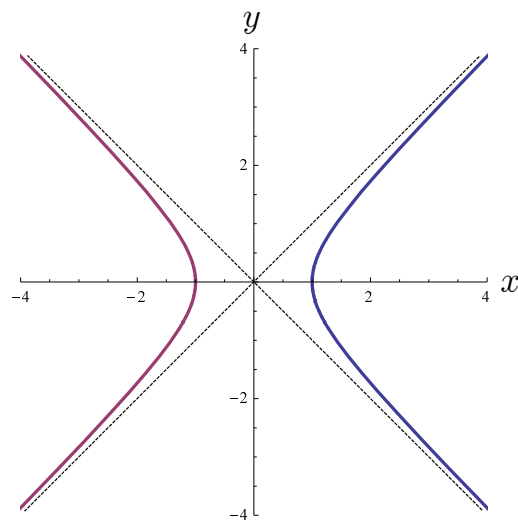


図 14:  $c = d = 1$  の双曲線。点線は  $y = \pm x$  の直線を表す。

## 6 運動量と力積

これまでは Newton の運動方程式を基にして、様々な物理現象を数理的に解析してきた。その際に重要だったのは、当然ながら運動方程式を積分することであった。しかしながら、運動方程式を解いて解析的な解を得ることは必ずしも保証されているわけではない。また、運動方程式を解くためには力  $\mathbf{F}$  について既知である必要があるが、実際の物体の運動では必ずしも力がどのような値を取るかは分からない場合がある。そのような場合には運動方程式は何も教えてくれないのだろうか？答えは NO である。運動方程式を上手く活用すれば、我々は物体の運動について少なからぬ情報を得ることができる。以降の節では運動方程式を数理的に変形して、どのような情報が引き出せるかを一般的に議論しよう。

## 6.1 運動量と力積

物体の質量を  $m$ 、物体の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$ 、物体にはたらく力を  $\mathbf{F}$  として Newton の運動方程式を考えよう。速度ベクトルを  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  のように表すと、運動方程式 (1) は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}, \quad (145)$$

と書くことができる。ここで  $\mathbf{p}$  は運動量と呼ばれるベクトル量である。運動量の単位は  $\text{kg m/s}$  であり、次元は  $[\mathbf{p}] = \text{MLT}^{-1}$  となる。運動方程式の両辺に  $dt$  をかけると

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt, \quad (146)$$

のような式を得る<sup>19</sup>。この式は運動量の微小変化は(力 × 微小時間)で与えられることを意味する。ベクトル  $\mathbf{F}dt$  は時間  $dt$  の間に物体にはたらく力積と呼ばれる。 $\mathbf{F}dt$  を時刻  $t_A$  から  $t_B$  まで積分したベクトル量を  $\mathbf{I}_{AB}$  とすると

$$\mathbf{I}_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt \mathbf{F} = \int_{\mathbf{p}_A}^{\mathbf{p}_B} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A, \quad (147)$$

となる。ここで  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(t_i)$  ( $i = A, B$ ) とした。 $\mathbf{I}_{AB}$  は時刻  $t_A$  から  $t_B$  までに物体にはたらいた力積と呼ばれ、これは時刻  $t_B$  における運動量と時刻  $t_A$  における運動量の差に等しい。力積の単位は運動量と同じで  $\text{kg m/s}$  であり、次元は  $[\mathbf{I}] = \text{MLT}^{-1}$  となる。

我々はこれまで物体は質点であると考えて議論してきたが、実際問題としては物体には大きさや形状があるのでその影響は無視できない。そうすると、物体にどのような力がはたらいているかを厳密に知ることは非常に難しい。しかしながら、物体の運動量の変化である力積は測定することが可能であり、例えば時間  $\Delta t$  の間に物体が受ける力積が  $\mathbf{I}$  であったとすると、物体には平均して力

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\mathbf{I}}{\Delta t}, \quad (148)$$

がはたらくことが分かる。

力積の例として、質量  $m$  のサッカーボールを一定の力の大きさ  $F$  で蹴る運動を考えよう。力を加える角度を  $\theta$  に設定すると、 $\mathbf{F} = F(\cos\theta, \sin\theta)$  である。足はボールに時刻  $t = 0$  から  $t = \Delta t$  まで接するとすると、力積は  $\mathbf{I} = \mathbf{p}(\Delta t) - \mathbf{p}(0) = \mathbf{F}\Delta t$  となる。従って、蹴った後のサッカーボールの運動量は

$$\mathbf{p}(\Delta t) = \mathbf{p}(0) + \mathbf{F}\Delta t, \quad (149)$$

である。サッカーボールが  $t = 0$  で静止している場合には、 $\mathbf{p}(0) = 0$  なのでボールは  $\mathbf{F}$  と同じ角度  $\theta$  の方向に飛んでいく。しかし、 $\mathbf{p}(0) \neq 0$  の場合には、 $\mathbf{F}$  の方向  $\theta$  とサッカーボールが飛ぶ方向  $\theta'$  は一致しない。

**問 11** サッカーボールの質量を  $m = 0.5 \text{ kg}$  とする。サッカーボールを  $\theta = \frac{\pi}{6}$  の角度方向に  $v = 10 \text{ m/s}$  の速さで蹴り出すために必要な力積  $\mathbf{I}$  を求めよ。また、サッカーボールが  $v_0 = 4 \text{ m/s}$  の速さで転がってきたときに、同じ力積  $\mathbf{I}$  でサッカーボールを蹴ったらボールは角度  $\theta'$  の方向に飛んで行った。 $\cos\theta'$  を求めよ。

<sup>19</sup>念のため注意しておく、 $\mathbf{F}$  は時間に依存する。

## 6.2 運動量保存の法則

物体1と物体2があって、互いに作用・反作用による力(内力)を及ぼしながら運動をしている状況を考えよう。外力はないとする。物体1と物体2の運動量をそれぞれ  $\mathbf{p}_1$  および  $\mathbf{p}_2$  とすると、運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21}, \quad (150)$$

のようになる。作用・反作用の法則により  $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$  なので、2式を足し合わせると

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (151)$$

となることが分かる。これは、物体1の運動量と物体2の運動量の和である全運動量  $\mathbf{P}$  が時間に依存しない保存する量であることを表す。上式は、式(111)において外力がない場合の表式を運動量を使って書き換えたものになっているので、全運動量が保存することと重心が等速直線運動をすることは同じことである。

物体が  $n$  体ある場合でも同様な議論が成り立つ。 $i$  番目の物体の運動量を  $\mathbf{p}_i$  とし、物体間には内力のみがはたらくとすると、各物体についての運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1n}, \\ \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{F}_{2n}, \\ \frac{d\mathbf{p}_3}{dt} &= \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \cdots + \mathbf{F}_{3n}, \\ &\vdots \\ \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} &= \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \mathbf{F}_{n3} + \cdots, \end{aligned} \quad (152)$$

となる。作用・反作用の法則により  $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$  なので、式を全て足し合わせると

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad (153)$$

となることが分かる。これはやはり、全運動量  $\mathbf{P}$  が時間に依存しない保存する量であることを表す。

以上で明らかのように、物体に外力がはたらいてない場合には全運動量は保存する。例えば惑星の運動や Rutherford 散乱では全運動量は保存し、2体の重心は等速直線運動を行う。しかし、自由落下や空気抵抗がある場合の自由落下およびばねによる振動では、重力やばねの力のような外力による運動を考えているので、物体の運動量は保存しない。

最後に運動量保存を用いた簡単な例を挙げておこう。物体1が運動量  $\mathbf{p}_1$ 、物体2が運動量  $\mathbf{p}_2$  で接近し、適当に相互作用をした後に物体1が運動量  $\mathbf{p}'_1$ 、物体2が運動量  $\mathbf{p}'_2$  で飛び去ったとしよう。このとき全運動量は保存するので

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad (154)$$

となる。特に重心の位置が原点と一致するような慣性系で考えると、 $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$  となる。

## 7 仕事とエネルギー

### 7.1 運動エネルギーと仕事

物体の質量を  $m$ 、物体の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$ 、物体にはたらく力を  $\mathbf{F}$  として Newton の運動方程式を考えよう。速度ベクトルを  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  のように表すと、運動方程式 (1) は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (155)$$

と書くことができる。ここで

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right), \quad (156)$$

となることを用いると、 $\mathbf{v}$  と式 (155) の内積をとった式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (157)$$

となる。左辺の  $\frac{1}{2} m v^2$  は物体の運動エネルギーと呼ばれるスカラー量である。運動エネルギーの単位は  $\text{kg m}^2/\text{s}^2$ 、次元は  $\text{ML}^2\text{T}^{-2}$  であり、特に単位についてはジュール  $\text{J} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$  を導入して表す。上式の両辺に  $dt$  をかけると、 $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$  なので

$$d \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (158)$$

を得ることができる。右辺の  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  は、物体が  $d\mathbf{r}$  だけ移動する間に受けた仕事と呼ばれる。仕事の単位も  $\text{J}$  であり、次元は  $\text{ML}^2\text{T}^{-2}$  である<sup>20</sup>。物体の速度と物体にはたらく力が直交しているときには仕事は 0 である。

物体が位置  $\mathbf{r}_A$  から  $\mathbf{r}_B$  まで経路  $C$  に沿って移動したとする。このとき、仕事  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$  を積分した量を  $W_{A \rightarrow B}$  と表すと

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_C = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2, \quad (159)$$

のようになる。ここで、位置  $\mathbf{r}_i$  ( $i = A, B$ ) における物理量を添え字  $i$  ( $i = A, B$ ) を使って表した。仕事の積分区間を微小に区切って図示したものが図 15 である。上式より、仕事  $W_{A \rightarrow B}$  は時刻  $t_A$  から  $t_B$  までの間の運動エネルギーの変化分に等しいことが分かる。仕事  $W_{A \rightarrow B}$  は実はどのような経路  $C$  に沿って積分したかで結果が異なる場合がある。矢印  $\overset{C}{\rightarrow}$  と  $d\mathbf{r}_C$  はそのあたりの事情を考慮してあらわに書き記している。

仕事の例として、4.6 節で考察した、長さ  $l$  の棒と質量  $m$  の物体からなる単振り子の運動を再考しよう。振り子が  $\theta$  から  $\theta + d\theta$  へ振れたときの、物体の変位  $d\mathbf{r}$  と物体にはたらく力  $\mathbf{F}$  は

$$d\mathbf{r} = l d\theta \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{F} = (mg \cos \theta - T) \mathbf{e}_r - mg \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (160)$$

<sup>20</sup>単位時間あたりの仕事を仕事率と呼ぶ。仕事率の単位は  $\text{J/s}$  であり、次元は  $\text{ML}^2\text{T}^{-3}$  である。特にこの単位をワット  $\text{W} = \text{J/s}$  を導入して表す。電気代の請求書には使用欄に  $\text{kWh}$  (キロワット・アワー) なる単位が表記されている。h は 1 時間 (1 hour) を表し、これは仕事の量 = (仕事率  $\times$  時間) となる。電気はどこかの誰か (あるいは物体) が仕事をしているから使えるのである。

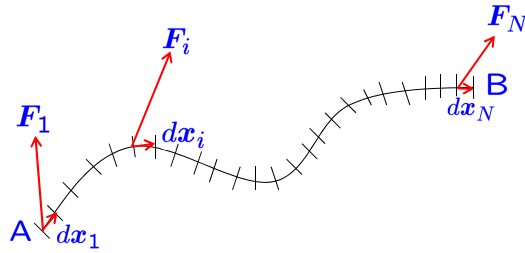


図 15: 仕事と線積分。 $\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{x}_i$  は経路を  $d\mathbf{x}_i$  だけ移動するときにした仕事。

であり、仕事は

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mgl \sin \theta d\theta = d(mgl \cos \theta), \quad (161)$$

となる。ここで  $T$  は物体にはたらく張力の大きさを表す。従って物体にはたらく仕事は

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d(mgl \cos \theta) = mgl \cos \theta_B - mgl \cos \theta_A, \quad (162)$$

となる。この式より、張力  $T$  は物体に対して仕事をしないことがわかる。また、仕事は積分の経路に依存しないで唯一に決まることも分かる。(だから経路  $C$  は省略している。) これを式 (159) に代入すると

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - mgl \cos \theta_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgl \cos \theta_B, \quad (163)$$

を得る。物体の位置 A と B はどこでもよいので、結局  $E$  を定数として

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \theta, \quad (164)$$

と書くことができる。 $E$  は物体の全エネルギーであり、これは単振り子に関するエネルギーの保存則を表す。

## 7.2 保存力、ポテンシャルエネルギーおよびエネルギー保存の法則

前節の単振り子の例では、仕事を上手く積分してエネルギー保存の法則を導くことができた。この節では、エネルギー保存の法則が成り立つような場合について一般的に考えてみよう。

式 (158) において、右辺をスカラー量  $U$  の微小変化として

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU, \quad (165)$$

のように表せたとする。このとき  $\mathbf{F}$  を保存力と呼び、 $U$  をポテンシャルエネルギーと呼ぶ。保存力の場合には式 (158) は簡単に積分できて

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U, \quad (166)$$

を得る。これはエネルギーの保存則であり、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和  $E$  は時間に依存しない量となることを表す。また逆に、エネルギー保存の法則 (166) が成り立てば、これを微分すると  $d(\frac{1}{2}mv^2) = -dU$  となるので、力は保存力となる。

これまでに考えた物理現象においては、一様重力、ばねの力および万有引力は保存力である。例えば、質量  $m$  の物体にはたらく一様重力は  $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$  なので

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mgdz = -d(mgz), \quad (167)$$

となり、 $U = mgz$  を得る。 $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$  が保存することは高校物理でおなじみの事例であろう。なお  $U$  については定数の分だけ不定性があり、これはポテンシャルエネルギーの原点をどこにとるかという自由度に相当する。

ばねの力が保存力であることも確認しておこう。ばねの自然長を  $\ell$  とすると、質量  $m$  の物体にはたらくばねの力は  $\mathbf{F} = (-k(x - \ell), 0, 0)$  なので

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -k(x - \ell)dx = -d\left(\frac{1}{2}k(x - \ell)^2\right), \quad (168)$$

となり、 $U = \frac{1}{2}k(x - \ell)^2$  を得る。 $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - \ell)^2$  が保存することもおなじみの事例であろう。

以上の議論で既に明らかだと思うが、物体にはたらく力が保存力の場合には仕事は経路の取り方に依存しない。実際に

$$W_{A \rightarrow B} = U_A - U_B, \quad (169)$$

となってポテンシャルエネルギーの値の差になるので、仕事は始点  $A$  と終点  $B$  にのみ依存し、途中の経路には依らないことが分かる。逆に、仕事が経路の始点  $A$  と終点  $B$  にのみ依存し途中の経路には依存しないとすると、ポテンシャルエネルギーを仕事で定義できるので力は保存力となる。従って、力が保存力であることと仕事が経路に依存しないことは等価である。

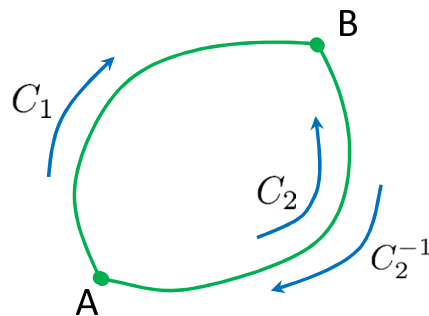


図 16: 任意の仕事経路  $C_1$  と  $C_2$ 。  $C_2^{-1}$  は  $C_2$  と向きが逆の径路を表す。

仕事が経路に依存しない、ということをより簡潔な式で表しておこう。まず、図 16 に描いたように、点  $A$  を始点とし、点  $B$  を終点とするような任意の経路  $C_1$  と  $C_2$  を考える。



そして、それらの経路に沿った仕事の差を考えると

$$\begin{aligned}
 W_{A \xrightarrow{C_1} B} - W_{A \xrightarrow{C_2} B} &= \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{C_1} - \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{C_2} \\
 &= \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{C_1} + \int_{r_B}^{r_A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{C_2^{-1}} \\
 &= \oint_{C=C_2^{-1}C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_C,
 \end{aligned} \tag{170}$$

となる。従って、仕事が経路に依存しないということ、あるいは力が保存力であること、は以下の式

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{171}$$

が成り立つことと等価である。ここで  $\oint_C$  は積分の経路  $C$  がループであることを表す。

### 7.3 力が保存力であるための必要十分条件

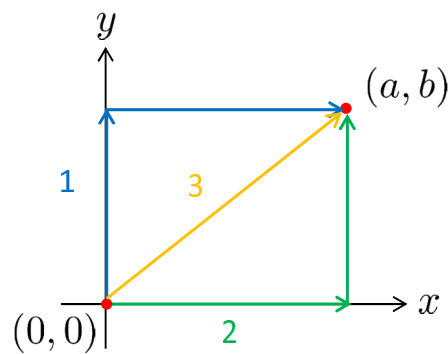


図 17: 仕事の経路。

力が保存力かどうかの判定について、もう少し考察してみよう。一般に仕事  $W_{A \rightarrow B}$  は、物体が  $r_A$  から  $r_B$  へ移動するときの経路に依存する。例えば 2 次元平面において、位置  $(x, y)$  に物体があるときに力  $\mathbf{F} = (F_x, F_y) = (0, x^2)$  がはたらく場合を考えてみよう。点 A の位置を  $r_A = (0, 0)$ 、点 B の位置を  $r_B = (a, b)$  として、図 17 のように点 A から点 B へ辿り着く経路を 3 つ用意する。それぞれの経路において、力  $\mathbf{F}$  による仕事を計算すると

$$\begin{aligned}
 W_{A \xrightarrow{1} B} &= \int_0^b dy F_y \Big|_{x=0} + \int_0^a dx F_x \Big|_{y=b} = 0, \\
 W_{A \xrightarrow{2} B} &= \int_0^a dx F_x \Big|_{y=0} + \int_0^b dy F_y \Big|_{x=a} = a^2 b, \\
 W_{A \xrightarrow{3} B} &= \int_0^1 ds (aF_x + bF_y) \Big|_{(x,y)=(as,bs)} = \frac{1}{3} a^2 b,
 \end{aligned} \tag{172}$$

となる。明らかに経路によって仕事の値は異なっている。このことは

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = x^2 dy \neq -dU, \quad (173)$$

となることから明らかである。

以上のように、力  $\mathbf{F}$  が保存力であるかを判定するには、 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$  となるかどうかを見極めればよい。そこで、この関係式をもう少し整理しておこう。そのためには、右辺のポテンシャルエネルギーの微小変化分  $dU$  を以下のように書き直すといよい。まず、 $U(x, y, z)$  は3変数に依存する関数なので、 $\Delta U$  は

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z) \\ &= U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ &\quad + U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z + \Delta z) \\ &\quad + U(x, y, z + \Delta z) - U(x, y, z) \\ &= \left( \frac{U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \right) \Delta x \\ &\quad + \left( \frac{U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \right) \Delta y \\ &\quad + \left( \frac{U(x, y, z + \Delta z) - U(x, y, z)}{\Delta z} \right) \Delta z, \end{aligned}$$

のように表される。そして、ここで

$$\frac{\partial U}{\partial z} \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{U(x, y, z + \Delta z) - U(x, y, z)}{\Delta z}, \quad (174)$$

のように偏微分を定義する。これは  $z$  に関する偏微分で、 $x$  と  $y$  は固定して  $z$  方向にのみ微分をする演算である。 $\frac{\partial}{\partial z}$  はしばしば  $\partial_z$  のように略記する。 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)$  の極限をとると、 $\Delta U$  は

$$dU = \partial_x U dx + \partial_y U dy + \partial_z U dz = \nabla U \cdot d\mathbf{r}, \quad (175)$$

となる。 $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  はナブラと呼ばれる微分演算子のベクトルであり、

$$\nabla U = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix}, \quad (176)$$

は  $U$  の勾配ベクトル (gradient) と呼ばれる。従って、式 (165) より保存力  $\mathbf{F}$  はポテンシャルエネルギー  $U$  を用いて

$$\mathbf{F} = -\nabla U = - \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix}, \quad (177)$$

のように書き表される。

ここで、 $\mathbf{F}$  の回転 (rotation) と呼ばれるベクトルを

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}, \quad (178)$$

のように定義しよう。ここで  $\times$  は外積と呼ばれるベクトルとベクトルから新たなベクトルを構成する演算であるが、 $\nabla \times \mathbf{F}$  はとりあえずここでは上のように定義されるベクトル量だと思えばよい。すると、力が保存力であるための必要十分条件は

$$\mathbf{F} = -\nabla U \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0, \quad (179)$$

であることを示すことができる。必要条件であることは簡単に示すことができる。実際、式 (177) を  $\nabla \times \mathbf{F}$  に代入すると、

$$\begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z U - \partial_z \partial_y U \\ \partial_z \partial_x U - \partial_x \partial_z U \\ \partial_x \partial_y U - \partial_y \partial_x U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (180)$$

のようになる。十分条件は Stokes の定理を用いて示すことができる。式 (171) の左辺のループ積分は Stokes の定理によって

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (181)$$

のように変形できる。ここで  $d\mathbf{S}$  は面積要素を表すベクトルであり、向きは領域  $D$  に直交する方向である。よって、 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  が成り立つとすれば式 (171) が成立し、力は保存力となることが示される。

以上により、力が保存力となるための必要十分条件は  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ 、あるいは式 (171) が成り立つことであることが示された。特に  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  を用いれば、力が保存力であるかどうかをすぐに判定できる。例えば、 $\mathbf{F} = (0, x^2, 0)$  のときは  $\partial_x F_y - \partial_y F_x \neq 0$  なので、保存力ではない。

**問 12** 偏微分は  $\partial_x \partial_y U = \partial_y \partial_x U$  を満たす可換な演算であることを示せ。

**問 13** 図 17 において、原点  $(0, 0, 0)$  から出発して経路 2 に沿って  $(a, b, 0)$  に行き、経路 1 に沿って逆向きに原点まで 1 周したとする。この経路を  $C$  とし、 $C$  で囲まれる  $(x, y)$  平面の領域を  $D$  とする。このとき、Stokes の定理 (281) の簡略版

$$\oint_C (F_x dx + F_y dy) = \int_D dx dy (\partial_x F_y - \partial_y F_x),$$

を示せ。(ヒント：右辺を積分して左辺を導け。)

## 8 角運動量と力のモーメント

### 8.1 力学に必要な数学の基礎 6 — ベクトルの外積

まずはベクトルの外積を定義する。3次元のベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  があるとして、これらから新たなベクトルを以下のように構成することができる。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}, \quad (182)$$

これが外積の定義である。 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  の大きさを計算すると

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| &= \sqrt{(A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2} \\ &= \sqrt{A^2 B^2 - A_x^2 B_x^2 - A_y^2 B_y^2 - A_z^2 B_z^2 - 2(A_y B_y A_z B_z + A_z B_z A_x B_x + A_x B_x A_y B_y)} \\ &= \sqrt{A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2} \\ &= AB \sin \theta, \end{aligned} \quad (183)$$

となる。ここで  $\theta$  は  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  のなす角であり、 $AB \sin \theta$  はベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  がはる平行四辺形の面積を表す。さらに、具体的な成分計算を実行すれば

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (184)$$

を満たすこともわかる。従って、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  は  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  ではられる平行四辺形に垂直なベクトルで、その大きさは平行四辺形の面積であり向きは図 18 のようになる。

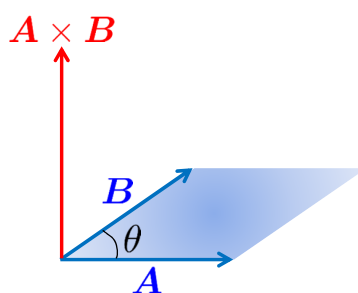


図 18: 外積の幾何的意味。

また、外積には以下のような性質があることがわかる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} // \mathbf{B} \text{ のとき } \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (185)$$

最後の式は、3つのベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  で張られる立体の体積を表す。

問 14 電荷  $q$  をもつ荷電粒子が磁場  $\mathbf{B}$  を速度  $\dot{\mathbf{r}}$  で運動しているとする。このとき Lorentz 力は  $\mathbf{F} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$  となることを成分で表示して確認せよ。

問 15 式 (185) を示せ。

## 8.2 角運動量と力のモーメント

質量  $m$  の物体が位置  $\mathbf{r}$  にあり、力  $\mathbf{F}$  を受けているとする。 $\mathbf{r}_0$  を定数ベクトルとして、 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  と運動方程式の外積をとると

$$m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}, \quad (186)$$

のようになる。さらに、外積の性質  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$  を使うと、左辺は

$$m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right), \quad (187)$$

のように変形できる。従って、ベクトル

$$\mathbf{L} \equiv (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{N} \equiv (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}, \quad (188)$$

を定義すると、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad (189)$$

なる関係式を得る。 $\mathbf{p}$  は運動量である。ベクトル  $\mathbf{L}$  は、基準点  $\mathbf{r}_0$  のまわりの物体の角運動量と呼ばれる。角運動量は物体の運動の回転具合を測るベクトルである。一方で、ベクトル  $\mathbf{N}$  は、物体にはたらく基準点  $\mathbf{r}_0$  のまわりの力のモーメント (トルク) と呼ばれる。角運動量は、ベクトル  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  と  $\mathbf{p}$  に直交する。従って、角運動量が保存する場合には、物体の運動は角運動量ベクトルに垂直な平面内での運動となる。

角運動量や力のモーメントは基準点  $\mathbf{r}_0$  の取り方で値が変わることに注意しよう。例として、3次元空間を  $x$  軸に沿って速さ  $v$  で等速直線運動している質量  $m$  の物体を考えよう。物体には力がはたらくていないので、力のモーメントは0である。従って、角運動量は保存する。実際、物体の位置を  $\mathbf{r}(t)$  とし、基準点を  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  とすると

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} vt - x_0 \\ -y_0 \\ -z_0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (190)$$

なので、角運動量は

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mz_0v \\ my_0v \end{pmatrix}, \quad (191)$$

となる。角運動量は保存するが、明らかに  $\mathbf{r}_0$  の取り方に依存している。

また別の例として、3次元空間の  $(x, y)$  平面内を外力によって、原点を中心に角速度  $\omega$  で等速円運動をしている質量  $m$  の物体を考えよう。円運動の半径を  $R$ 、物体の位置を  $\mathbf{r}(t)$  とし、基準点を  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  とすると

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} R \cos \omega t - x_0 \\ R \sin \omega t - y_0 \\ -z_0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (192)$$

なので、角運動量は

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} mz_0 R \omega \cos \omega t \\ mz_0 R \omega \sin \omega t \\ mR^2 \omega - mx_0 R \omega \cos \omega t - my_0 R \omega \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad (193)$$

となる。また、物体にはたらく力は

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -mR\omega^2 \cos \omega t \\ -mR\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (194)$$

なので、物体にはたらく力のモーメントは

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -mz_0 R \omega^2 \sin \omega t \\ mz_0 R \omega^2 \cos \omega t \\ mx_0 R \omega^2 \sin \omega t - my_0 R \omega^2 \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad (195)$$

となる。 $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$  とすると、外力による力のモーメントは0となり、角運動量は保存する。一般に、力が中心力であれば力のモーメントは0となり、角運動量は保存する。

### 8.3 角運動量保存の法則

物体1と物体2があって、互いに作用・反作用による力(内力)を及ぼしながら運動をしている状況を考えよう。外力はないとする。物体1と物体2の運動量をそれぞれ  $\mathbf{p}_1$  および  $\mathbf{p}_2$  とすると、位置ベクトルと運動方程式の外積をとったものは

$$\mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}, \quad \mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}, \quad (196)$$

のようになる。作用・反作用の法則により  $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$  なので、2式を足し合わせて外積の性質を用いると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2, \quad (197)$$

となることが分かる。これは、原点まわりの全角運動量  $\mathbf{L}$  が時間に依存しない保存量であることを表す。

物体が  $n$  体ある場合でも同様な議論が成り立つ。 $i$  番目の物体の運動量を  $\mathbf{p}_i$  とし、物体間には内力のみがはたらくとすると、各物体について位置ベクトルと運動方程式の外積をとったものは

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1n}, \\ \mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} &= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2n}, \\ \mathbf{r}_3 \times \frac{d\mathbf{p}_3}{dt} &= \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{32} + \cdots + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{3n}, \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_n \times \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} &= \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{n2} + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{n3} + \cdots, \end{aligned} \quad (198)$$

となる。作用・反作用の法則により  $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$  なので、式を全て足し合わせて外積の性質を用いると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad (199)$$

となることが分かる。これはやはり、全角運動量  $\mathbf{L}$  が時間に依存しない保存量であることを表す。

以上で明らかのように、物体に外力がはたらいてない場合には全角運動量は保存する。例えば惑星の運動や Rutherford 散乱では全角運動量は保存し、さらに重心に対する角運動量も保存するので、相対位置に対する角運動量も保存することになる。Kepler の第 2 法則は相対位置に対する角運動量保存の法則を表している。

問 16 2 体の物体の角運動量  $\mathbf{L}$  を、重心ベクトル  $\mathbf{r}_G$  と相対位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を用いて表せ。

## 9 極座標による記述

### 9.1 3次元直交座標と極座標

中心力による物体の運動を記述するのに、我々はこれまでに 2 次元空間の極座標を用いてきた。これは物体の運動は本質的には 2 次元平面で考えれば十分であるからである。このことをみるために、以下では 3 次元直交座標と極座標の関係について調べよう。

まず物体の位置を表すベクトル  $\mathbf{r}$  は

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3, \quad (200)$$

のように表すことができる。ここで

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (201)$$

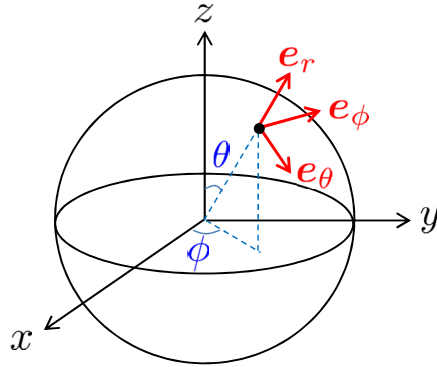


図 19: 半径  $r$  の球と 3 次元極座標

は直交座標の基底ベクトルで、それぞれ  $x$  軸、 $y$  軸および  $z$  軸方向の単位ベクトルとなっている。図 19 に描かれているように、3 次元の極座標は動径方向  $r$  と球の角度方向  $\theta$  および  $\phi$  で指定され、 $x$ 、 $y$  および  $z$  とは

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (202)$$

のような関係にある。そして、極座標における基底ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_\phi &= \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (203)$$

で与えられる。物体の位置は  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$  と書くことができる。

物体の位置は時間とともに変化するので、極座標においては基底ベクトルも変化することになる。 $\theta(t)$  と  $\phi(t)$  が時間に依存すると考えると、基底ベクトルの時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \phi \dot{\theta} \mathbf{e}_2 - \sin \theta \dot{\theta} \mathbf{e}_3 - \sin \theta \sin \phi \dot{\phi} \mathbf{e}_1 + \sin \theta \cos \phi \dot{\phi} \mathbf{e}_2 \\ &= \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\sin \theta \cos \phi \dot{\theta} \mathbf{e}_1 - \sin \theta \sin \phi \dot{\theta} \mathbf{e}_2 - \cos \theta \dot{\theta} \mathbf{e}_3 - \cos \theta \sin \phi \dot{\phi} \mathbf{e}_1 + \cos \theta \cos \phi \dot{\phi} \mathbf{e}_2 \\ &= -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \cos \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\phi &= -\cos \phi \dot{\phi} \mathbf{e}_1 - \sin \phi \dot{\phi} \mathbf{e}_2 \\ &= -\sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_r - \cos \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (204)$$



となる。これより、物体の速度と加速度は

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \quad (205)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (2 \sin \theta \dot{r}\dot{\phi} + 2r \cos \theta \dot{\theta}\dot{\phi} + r \sin \theta \ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (206)$$

のように表される。質量  $m$  の物体に中心力のみがはたらく場合には、 $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{e}_r$  となるので運動方程式は

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\theta \\ + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi = F(r) \mathbf{e}_r, \end{aligned} \quad (207)$$

となる。成分ごとに表示すると

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 &= F(r), \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 &= 0, \\ L = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} & \end{aligned} \quad (208)$$

である。解として  $\theta = \frac{\pi}{2}$  を仮定すると、2次元の極座標表示の運動方程式を再現する。

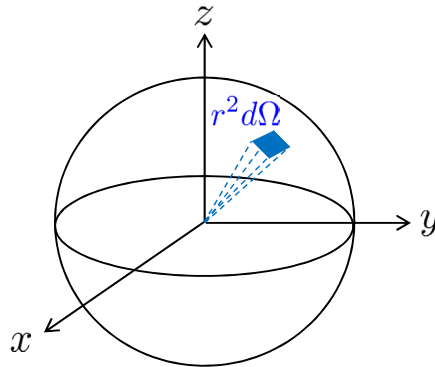


図 20: 半径  $r$  の球と面積  $r^2 d\Omega$

最後に直交座標と極座標を用いて、 $\mathbf{r}$  の微小変化  $d\mathbf{r}$  について記述しよう。直交座標の場合は簡単で

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_1 + dy \mathbf{e}_2 + dz \mathbf{e}_3, \quad (209)$$

のように書くことができる。 $\mathbf{r}$  を起点にして  $d\mathbf{r}$  で張られる直方体の微小体積は

$$dV = dx dy dz, \quad (210)$$

で与えられる。一方、式 (205) を用いると  $d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}dt$  の極座標表示は

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi, \quad (211)$$

のようになる。従って、 $\mathbf{r}$  を起点にして  $d\mathbf{r}$  で張られる直方体の微小体積は

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = r^2 dr d\Omega, \quad (212)$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi, \quad (213)$$

で与えられる。すなわち  $dV$  は角度方向の面積要素  $r^2 d\Omega$  に  $dr$  をかけたものであることが分かる。 $d\Omega$  は立体角と呼ばれる量で、角度が  $d\theta$ 、 $d\phi$  だけ変化したときに描く“角度方向の面積”を表す。

問 17  $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$  および  $\mathbf{e}_\phi$  は互いに直交する単位ベクトルであることを確かめよ。

## 9.2 地球の重力によるポテンシャルエネルギー

万有引力による力は保存力であり、ポテンシャルエネルギーを用いて表すことができる。実際、

$$\begin{aligned} \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \begin{pmatrix} \partial_x \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\ \partial_y \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\ \partial_z \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \\ \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^n &= n |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n-1} \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = n |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n-1} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \end{aligned} \quad (214)$$

と表されることに注意すると、位置  $\mathbf{r}$  にある質量  $m$  の物体が、位置  $\mathbf{r}'$  にある質量  $m'$  の物体から受ける万有引力は

$$\mathbf{F} = -\frac{Gmm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \frac{Gmm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (215)$$

のように表される。従って、万有引力のポテンシャルエネルギーは

$$U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\frac{Gmm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (216)$$

である。

地球を一様密度  $\rho$  の物質が分布した半径  $R$  の球体と考えよう。体積要素を  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  のように極座標で表示すると、地球の質量  $M$  は微小質量  $\rho dV$  を足しあげればよいので

$$\begin{aligned} M &= \int_{\text{地球内部}} \rho dV \\ &= \rho \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta \\ &= 2\pi \rho \int_0^R dr r^2 [-\cos \theta]_0^\pi \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \rho, \end{aligned} \quad (217)$$

のように表される。 $\frac{4\pi R^3}{3}$  は半径  $R$  の球の体積である。

次に、地球の重力によるポテンシャルエネルギーを考えよう。地球の中心点を原点にとる。位置  $\mathbf{r} = (0, 0, r)$  に質量  $m$  の物体があるときの重力によるポテンシャルエネルギーは、地球を形成する物質から生じるポテンシャルエネルギーの和で与えられる<sup>21</sup>。地球を形成する物質の位置を  $\mathbf{r}'$  で表し、体積要素を  $dV' = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'$  のように極座標で表示すると、ポテンシャルエネルギー  $U$  は

$$\begin{aligned}
 U &= - \int_{\text{地球内部}} \frac{Gm\rho dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= -Gm\rho \int_0^R dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{r'^2 \sin \theta'}{\sqrt{(r - r' \cos \theta')^2 + r'^2 \sin^2 \theta'}} \\
 &= -2\pi Gm\rho \int_0^R dr' \int_0^\pi d\theta' \frac{r'^2 \sin \theta'}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta' + r'^2}} \\
 &= -2\pi Gm\rho \int_0^R dr' \left[ \frac{r'}{r} \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta' + r'^2} \right]_{\theta'=0}^{\theta'=\pi} \\
 &= -\frac{2\pi Gm\rho}{r} \int_0^R dr' r' (|r + r'| - |r - r'|), \tag{219}
 \end{aligned}$$

となる。ここで上記の積分は、 $R \leq r$  の場合を考えると

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{4\pi Gm\rho}{r} \int_0^R dr' r'^2 \\
 &= -\frac{4\pi Gm\rho R^3}{3r} \\
 &= -\frac{GmM}{r}, \tag{220}
 \end{aligned}$$

となり、 $r < R$  の場合を考えると

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{4\pi Gm\rho}{r} \int_0^r dr' r'^2 - 4\pi Gm\rho \int_r^R dr' r' \\
 &= -\frac{4\pi\rho Gm}{3} r^2 - 2\pi Gm\rho (R^2 - r^2) \\
 &= \frac{2\pi\rho Gm}{3} r^2 - 2\pi Gm\rho R^2, \\
 &= \frac{GmMr^2}{2R^3} - \frac{3GmM}{2R}, \tag{221}
 \end{aligned}$$

となることがわかる。まとめると、地球による重力ポテンシャルは図 21 のようになる。 $r = 0$  近傍および  $R \ll r$  ではポテンシャルの傾きが緩やかになって、重力は非常に弱くなることが分かる。

**問 18** 地球の内部に空洞があった場合、重力ポテンシャルはどのようなようになるかを考察せよ。

<sup>21</sup>物体に複数の保存力  $\mathbf{F}_i = -\nabla U_i (i = 1, \dots, n)$  がはたらいているとすると、物体にはたらく力は

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = -\nabla \left( \sum_{i=1}^n U_i \right), \tag{218}$$

となる。従って、ポテンシャルエネルギーも足し合わせることができる

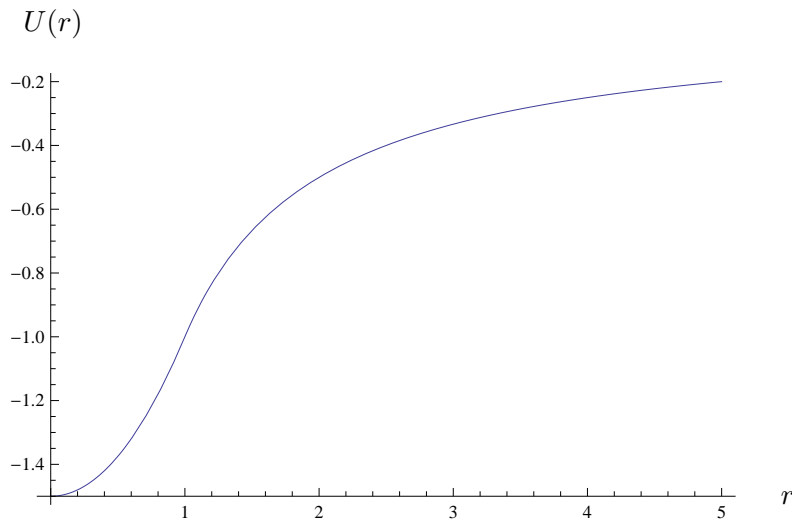


図 21: 半径  $R = 1$ 、 $GmM = 1$  の惑星の重力によるポテンシャルエネルギー

## 10 まとめ

この講義の前半では力学における運動の 3 法則について解説し、物体の落下運動、ばねによる単振動および惑星の運動について、Newton の運動方程式をもとに解析した。そして、我々が日常経験する物体の運動は、Newton の運動方程式という非常にシンプルな微分方程式に支配されていることを学習した。

物体の落下運動では、主に速度に比例する空気抵抗がある場合の物体の落下運動や斜方投射について議論した。具体的に運動方程式の解を考察して、一般に物体の速度は指数関数で減衰し終速度に至ることを確認した。また、解を Taylor 展開することによって、空気抵抗が十分小さい場合には物体の運動は自由落下で近似できることを示した。物体の斜方投射については、物体が描く軌跡がどのような関数になるかについても議論した。

ばねによる物体の運動では、物体の運動は三角関数の重ね合わせによって記述されることをみた。また、三角関数は指数関数によって表されることも示した。特に Euler の公式 (58) は今後は当たり前のように使うことになる。ばねによる物体の運動でも空気抵抗を考慮して考察することができるが、これは各自考えてみて欲しい。

惑星の運動はこの講義の中心となる部分である。古代より天体の運動は、農業、占星、政治、軍事、宗教および哲学といった人類の活動に多大な影響を及ぼしてきた。この理由は様々だろうが、思うに天体の運動は規則的なのだが、稀に当時は予測不可能な不思議なイベント (日食、月食、彗星到来) があって、それが人間の心理面に大きな影響を与えたからだろう。Newton 力学は、惑星も地球上と同じ運動方程式と万有引力の法則に従って運動しており、原理的にはその運動の未来を予測できることを示した。これによって天体イベントは経済価値をとまなうイベント (日食や月食の天体観測ショー、人工衛星、観測衛星のスイングバイなど) になったのである<sup>22</sup>。講義では、太陽系の惑星の運動に関する

<sup>22</sup>私が子供の頃はハレー彗星が 70 数年ぶりに観測できるという宣伝があって、天体望遠鏡がよく売れていたように思う。ハレー彗星は古くから様々な書物に記載されているので、その内容を調べると当時の人々の感覚が分かって面白いかもしれない。

Kepler の 3 法則が、Newton 力学によって完全に導出できることを説明した。

講義の後半では、物体の個別の運動にふみこまなくても議論できる、運動量保存、エネルギー保存および角運動量保存について解説した。これらの保存則は物体の運動がどのようになるかを直感的に理解する上で非常に重要である。物体に関する運動方程式を解く前にどのような量が保存するかを理解すると、物体の運動の本質がみえてくるかもしれない。これらの保存量は時空の対称性と密接に関係しており、例えばエネルギー保存則は運動方程式が時間軸を定数だけシフトしても不変であることと関係している。このような保存則と対称性の関係は、解析力学を学ぶことでより一般的に理解することができる。教科書「考える力学」の最後の方に解析力学の記述があるので、力学を習得したらぜひ解析力学についても学んで欲しい。解析力学については Landau の「力学」が優れている。

なお目次を見ればわかるように、ノートでは数学の基礎となる部分を「力学に必要な数学の基礎  $n$ 」として記載した。これらは電磁気学や量子力学では当たり前のように使うことになるので、ぜひこの機会にしっかりと理解をして欲しい。これらだけを読んでもわかるように心がけて書いたつもりである。Rutherford 散乱とベクトル解析については講義の時間が足りないので付録にまわしたが、このあたりの物理と数学もとても大切なので、夏休み中に自習してくれたら幸いである。

## A 2 体問題における Rutherford 散乱

### A.1 Coulomb 力

物体 1 は質量  $m_1$  と電荷  $q_1$  をもち、物体 2 は質量  $m_2$  と電荷  $q_2$  をもつとする。物体 1 が位置  $\mathbf{r}_1$  にあり、物体 2 が位置  $\mathbf{r}_2$  にあるとすると、物体 1 には Coulomb 力

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (222)$$

がはたらき、物体 2 にはその反作用  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$  がはたらく。 $0 < q_1 q_2$  の場合は力は斥力であり、 $q_1 q_2 < 0$  の場合は力は引力となる。

### A.2 Rutherford 散乱

19 世紀中には、物質が原子の集合体であるという考えについては、科学者の間でも論争の種であった。しかし、19 世紀末から 20 世紀前半にかけて放射線源を用いた物質の散乱実験が行われるようになると、物質の内部構造を直接的に調べることができるようになった<sup>23</sup>。

1909 年に Geiger と Marsden は Rutherford の指導のもと、金の薄膜にアルファ線を照射する実験を行った。すると不思議なことに、アルファ粒子はほとんど金の薄膜を透過するものの、極まれに入射とは反対の方向に跳ね返ってくることを発見した。Rutherford は

<sup>23</sup>原子の存在を確定的にした研究としては Einstein の Brown 運動に関する研究 (1905 年) があげられる。Brown 運動とは、花粉を水に入れると中から微粒子が出てきて、その微粒子がランダムに方向を変えながら運動する様子を指す。Einstein は微粒子に水分子がランダムに衝突することで Brown 運動が起きることを数理的に示すことに成功した。これは後に揺動散逸理論へと発展していく。ちなみに 1905 年は奇跡の年と呼ばれており、Einstein はこの他に特殊相対性理論と光電効果を発表した。

この現象を説明するために、原子内部では核となる非常に狭い領域に正電荷が密集しており、その周辺を電子が周回していると予想した<sup>24</sup>。照射されたアルファ線は極まれに原子内の原子核近傍に到達し、クーロン力による強い斥力を感じて跳ね返されると考えたのである。以下ではこの Rutherford の原子核模型によるアルファ粒子の散乱を数理的に考察する。

粒子 1 は質量  $m_1$  と電荷  $q_1$  をもち、粒子 2 は質量  $m_2$  と電荷  $q_2$  をもつとし、十分遠方から粒子 2 に向けて粒子 1 を照射するとしよう。粒子 1 の位置を  $\mathbf{r}_1$  とし粒子 2 の位置を  $\mathbf{r}_2$  とすると、重心は式 (110) で与えられ、相対位置ベクトルは  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  で与えられる。粒子 1 と粒子 2 にはクーロン力のみがはたらいっていると仮定すると、その重心運動は等速直線運動を行うことになる。非自明なのは粒子 1 と粒子 2 の相対運動であり、運動方程式は

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (223)$$

となる。力は中心力なので、これを解くにあたっては極座標を用いるのが便利である。粒子 1 と粒子 2 の相対位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を極座標  $(r, \theta)$  で表すと、運動方程式は

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r, \quad (224)$$

のように書き表される。成分ごとの方程式は

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (225)$$

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}, \quad (226)$$

となる。ここで  $L$  は積分定数であるが、この式は粒子 1 の面積速度

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r(r\dot{\theta}) = \frac{L}{2\mu}, \quad (227)$$

が時間によらない定数であることを表している。

式 (226) より  $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$  なので、これを式 (225) に代入すると

$$\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0, \quad (228)$$

を得る。さらにこの式に  $\dot{r}$  をかけて積分をすると

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = E, \quad (229)$$

となる。ここで  $E$  は積分定数であり、粒子 1 と粒子 2 の相対運動に関するエネルギーを表す。この式をさらに積分できれば  $r(t)$  が求まるが、残念ながらそれは初等関数で表すことはできない。それでも式 (229) は粒子 1 と粒子 2 の相対運動に関して有益な情報を与えてくれる。縦軸をエネルギーとし横軸を  $r$  として、ポテンシャルエネルギー

$$V(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (230)$$

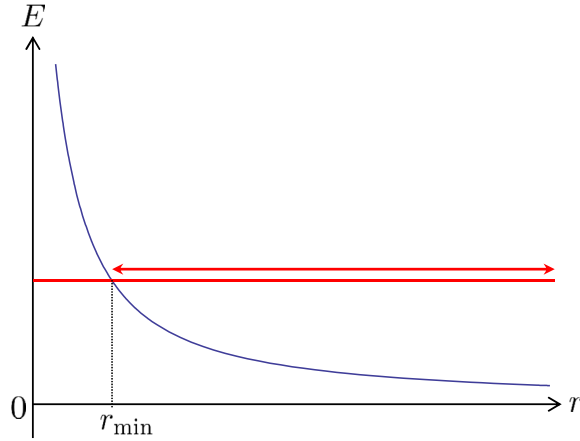


図 22: 粒子 1 と粒子 2 の相対運動に関するポテンシャル図

の関数と  $E = \text{一定}$  の線を描くと図 22 のようになる。ただし  $0 < q_1 q_2$  とした<sup>25</sup>。図から明らかのように  $0 \leq E$  のときは、粒子 1 は粒子 2 に散乱されて無限のかなたへ飛び去ってしまう。

次に粒子 1 と粒子 2 の相対位置の軌道について詳細に検討することにしよう。 $\dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta}$  を式 (229) に代入すると

$$\frac{L^2}{2\mu r^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = E \Leftrightarrow \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2\mu E r^4}{L^2} - \frac{2r^3}{R} - r^2, \quad (231)$$

となる。ここで、計算を見通しよくするために長さの次元をもつ量

$$\bar{R} \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{q_1 q_2 \mu}, \quad (232)$$

を導入した。この微分方程式を解くために  $u = \frac{1}{r}$  のような変数変換を行う。すると  $u$  についての微分方程式

$$\begin{aligned} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 &= \frac{2\mu E}{L^2} - \frac{2u}{\bar{R}} - u^2 \\ &= \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{1}{\bar{R}^2} - \left( u + \frac{1}{\bar{R}} \right)^2, \end{aligned} \quad (233)$$

が得られる。よって解は

$$u = -\frac{1}{\bar{R}} + \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{1}{\bar{R}^2}} \sin\left(\theta + \frac{\chi}{2}\right), \quad (234)$$

<sup>24</sup>1903 年に長岡半太郎は Rutherford に先駆けて同様な模型を発表している。

<sup>25</sup> $q_1 q_2 < 0$  のときは惑星の運動と同じようなポテンシャル図になる。電荷の符号が異なるときは引力なので、粒子 1 と粒子 2 の相対軌道は楕円軌道を描く。しかし電磁気学では加速運動をしている荷電粒子は電磁波を放出しエネルギーを失うので、粒子 1 は安定な軌道を描くことができずに粒子 2 へと落ち込むことになる。これは現実に原子が安定に存在することと矛盾する。この矛盾を解決するために量子力学が構築された。

となる。 $\chi$  は積分定数であるが、すぐ後にみるようにこのように選ぶと  $\chi$  は散乱角となつて、物理的な意味づけがはっきりする。最終的に粒子 1 と粒子 2 の相対軌道を表す式は

$$r = \frac{\bar{R}}{\bar{\epsilon} \sin(\theta + \frac{\chi}{2}) - 1}, \quad \bar{\epsilon} = \sqrt{1 + \frac{2\mu\bar{R}^2 E}{L^2}}, \quad (235)$$

のように表される。これより、 $1 < \bar{\epsilon}$  のときにのみ解が存在し、式 (130) より双曲線軌道となることが分かる。 $\chi$  は  $\theta$  の原点の定義を与えることになるが、ここでは

$$\bar{\epsilon} \sin \frac{\chi}{2} = 1, \quad (236)$$

を満たすようにとることとする。すると  $\theta = 0$  および  $\theta = \pi - \chi$  のとき  $r = \infty$  となる。粒子 1 は  $\theta = 0$  方向から入射されて、 $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$  で粒子 1 と粒子 2 の相対軌道が  $r = r_{\min} = \frac{\bar{R}}{\bar{\epsilon} - 1}$  まで最接近し、やがて  $\theta = \pi - \chi$  方向の無限のかなたへと散乱されるような双曲線軌道を描く。これが Rutherford 散乱であり、図示すると図 23 のようになる。

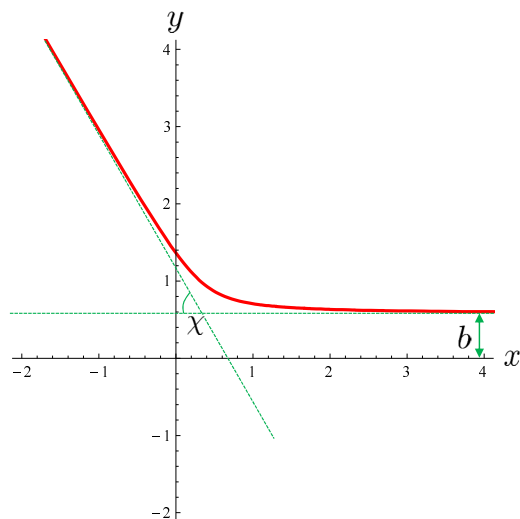


図 23:  $\bar{R} = 1$ 、 $\bar{\epsilon} = 2$ 、散乱角  $\chi = \frac{\pi}{3}$  の双曲線。粒子 2 は原点にある。

### A.3 双曲線軌道と散乱断面積

粒子 1 と粒子 2 の相対軌道は式 (235) で与えられることが分かった。この節では相対軌道の幾何的な性質について解析し、散乱断面積と呼ばれる量を導入する。まず、直角座標



$x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$  によって式 (235) を書き直そう。丁寧に変形を行うと

$$\begin{aligned}
r &= \bar{\epsilon} r \sin \left( \theta + \frac{\chi}{2} \right) - \bar{R} \\
\Leftrightarrow r^2 \sin^2 \left( \theta + \frac{\chi}{2} \right) + r^2 \cos^2 \left( \theta + \frac{\chi}{2} \right) &= \bar{\epsilon}^2 r^2 \sin^2 \left( \theta + \frac{\chi}{2} \right) - 2\bar{\epsilon}\bar{R}r \sin \left( \theta + \frac{\chi}{2} \right) + \bar{R}^2 \\
\Leftrightarrow (\bar{\epsilon}^2 - 1) \left\{ r \sin \left( \theta + \frac{\chi}{2} \right) - \frac{\bar{\epsilon}\bar{R}}{\bar{\epsilon}^2 - 1} \right\}^2 - r^2 \cos^2 \left( \theta + \frac{\chi}{2} \right) &= \frac{\bar{R}^2}{\bar{\epsilon}^2 - 1} \\
\Leftrightarrow (\bar{\epsilon}^2 - 1) \left( y \cos \frac{\chi}{2} + x \sin \frac{\chi}{2} - \frac{\bar{\epsilon}\bar{R}}{\bar{\epsilon}^2 - 1} \right)^2 - \left( x \cos \frac{\chi}{2} - y \sin \frac{\chi}{2} \right)^2 &= \frac{\bar{R}^2}{\bar{\epsilon}^2 - 1} \\
\Leftrightarrow \frac{\left( y \cos \frac{\chi}{2} + x \sin \frac{\chi}{2} - \frac{\bar{\epsilon}\bar{R}}{\bar{\epsilon}^2 - 1} \right)^2}{\bar{c}^2} - \frac{\left( x \cos \frac{\chi}{2} - y \sin \frac{\chi}{2} \right)^2}{\bar{d}^2} &= 1, \tag{237} \\
\bar{c} &= \frac{\bar{R}}{\bar{\epsilon}^2 - 1}, \quad \bar{d} = \frac{\bar{R}}{\sqrt{\bar{\epsilon}^2 - 1}},
\end{aligned}$$

のようになる。従ってこれは直線

$$\frac{y \cos \frac{\chi}{2} + x \sin \frac{\chi}{2} - \frac{\bar{\epsilon}\bar{R}}{\bar{\epsilon}^2 - 1}}{\bar{c}} = \pm \frac{x \cos \frac{\chi}{2} - y \sin \frac{\chi}{2}}{\bar{d}} \tag{238}$$

に漸近する双曲線を表す。ここで式 (236) より  $\sin \frac{\chi}{2} = \frac{1}{\bar{\epsilon}}$ 、 $\cos \frac{\chi}{2} = \frac{\sqrt{\bar{\epsilon}^2 - 1}}{\bar{\epsilon}}$  および  $\frac{\bar{c}}{\bar{d}} = \tan \frac{\chi}{2}$  なので、これらを用いて漸近する直線の式を整理すると

$$y = b \equiv \frac{\bar{R}}{\sqrt{\bar{\epsilon}^2 - 1}}, \quad y = -x \tan \chi + \frac{\bar{R}}{\cos \chi \sqrt{\bar{\epsilon}^2 - 1}}, \tag{239}$$

のようになる。 $b$  は衝突パラメータと呼ばれる量で、粒子 1 が入射してくる直線と粒子 2 の間の距離を表す。

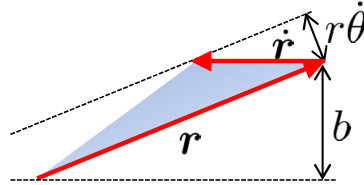


図 24:  $\mathbf{r}$  と  $\dot{\mathbf{r}}$  がはる三角形の面積は  $\frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} b v_0$ 。

実際の散乱実験においては、粒子 1 からなるビームを粒子 2 からなる標的に照射して、散乱される粒子 1 の個数と角度依存性を計測する。従って、様々な衝突パラメータ  $b$  の値をとる粒子 1 が照射されることになる。またビームのエネルギーは調整可能で、これは粒子 1 と粒子 2 の相対初速度  $v_0$  を調整できることを意味する。そこで、これまで軌道の導出では解に現れる定数として  $(L, E)$  の組や  $(\bar{R}, \bar{\epsilon})$  の組を用いたが、以下では  $(b, v_0)$  で書き直すことにしよう。図 24 に示されているように、 $r\dot{\theta}$  は  $\dot{\mathbf{r}}$  の  $\mathbf{e}_\theta$  方向の成分なので、 $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$  はベクトル  $\mathbf{r}$  とベクトル  $\dot{\mathbf{r}}$  がはる三角形の面積と等しい。従って  $L$  の定義式 (226) と  $E$  の定義式 (229) を  $t = -\infty$ 、 $r = \infty$  の初期位置で評価すると

$$L = \mu b v_0, \quad E = \frac{1}{2} \mu v_0^2, \tag{240}$$

を得る。これらの表式を用いると、式 (232) および (235) より

$$\bar{R} = \frac{4\pi\epsilon_0\mu b^2 v_0^2}{q_1 q_2}, \quad \bar{\epsilon} = \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\epsilon_0^2\mu^2 b^2 v_0^4}{q_1^2 q_2^2}}, \quad (241)$$

となる。さらに式 (236) より、散乱角  $\chi$  は  $b$  と  $v_0$  を用いて

$$\frac{1}{\sin \frac{\chi}{2}} = \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\epsilon_0^2\mu^2 b^2 v_0^4}{q_1^2 q_2^2}}, \quad (242)$$

のように表され、これを  $b$  について解くと

$$b = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\mu v_0^2} \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin \frac{\chi}{2}}, \quad (243)$$

のようになる。式 (243) において、 $\chi$  を  $d\chi$  だけ微小変化させた다고すると、 $b$  は

$$db = -\frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0\mu v_0^2} \frac{d\chi}{\sin^2 \frac{\chi}{2}}, \quad (244)$$

だけ微小変化することになる。ここで負号が出るのは、 $\chi$  が増えると  $b$  は減少するからである。(図 25 参照。)

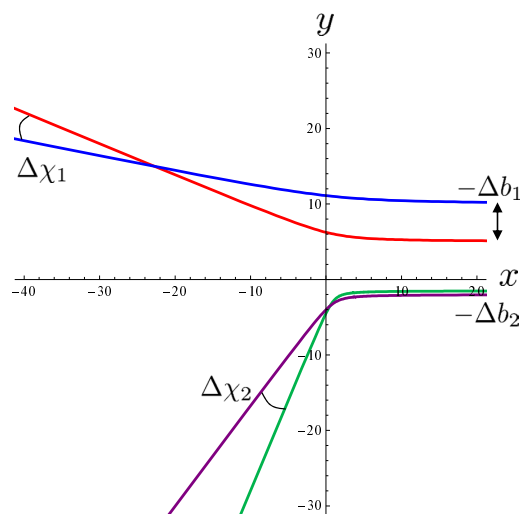


図 25: Rutherford 散乱による粒子 1 の 4 本の軌跡。粒子 2 は原点にある。

粒子 2 を原点とする半径が十分大きい球を用意して、角度座標を  $(\chi, \phi)$  とする。(次節を参照のこと。)  $\chi$  は散乱角であり、 $\phi$  は  $x$  軸まわりの回転角である。このとき球の点  $(\chi, \phi)$  近傍の立体角  $d\Omega = \sin \chi d\chi d\phi$  を通る粒子 1 の軌道を考えよう。時間を十分さかのぼった

ときに、粒子1の軌道が $x$ 軸に垂直な面を通過するときの面積 $d\sigma$ は

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= b|db|d\phi \\
 &= \frac{q_1^2 q_2^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \mu^2 v_0^4} \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi d\phi \\
 &= \frac{q_1^2 q_2^2}{64\pi^2 \epsilon_0^2 \mu^2 v_0^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \sin \chi d\chi d\phi \\
 &= \frac{q_1^2 q_2^2}{64\pi^2 \epsilon_0^2 \mu^2 v_0^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} d\Omega, \tag{245}
 \end{aligned}$$

のようになる。ここで

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_1^2 q_2^2}{64\pi^2 \epsilon_0^2 \mu^2 v_0^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}, \tag{246}$$

は微分断面積と呼ばれる量で、粒子1が $(\chi, \phi)$ 方向の立体角に散乱される確率を与える。これより、粒子1は $\chi = 0$ 付近で非常にたくさん観測され、 $\chi \sim \pi$ でも観測確率はわずかに存在することが分かる。これは Geiger と Marsden の実験結果を見事に説明するので、原子内部には原子核が存在することが確かめられたといえる<sup>26</sup>。

## B ベクトル解析の基礎

### B.1 力学に必要な数学の基礎 7 — ベクトル解析の基礎

力学や電磁気学ではベクトル量の演算を頻繁に行う。既にベクトルの内積と外積については述べたが、それら以外にベクトルの演算でよく現れる grad(勾配)、rot(回転) および div(発散) についてまとめておこう。

$$\text{grad } U = \nabla U = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix}, \tag{247}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}, \tag{248}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_x A^x + \partial_y A^y + \partial_z A^z = \sum_{i=x,y,z} \partial_i A^i. \tag{249}$$

grad と rot はベクトル量で、div はスカラー量である。これらは力学と電磁気学で頻繁に現れる記号なので、確実に覚えておくこと。なおベクトルの添え字を上にかいたり下にかいたり

<sup>26</sup>原子サイズの微小な世界では、量子力学による物理法則を適用する必要がある。Rutherford 散乱でも量子効果を含めた計算を実行することができるが、幸い力学の結果に対する量子論の補正は無視できるほど小さい。

いたりするが、力学では同じ量を表す。つまり、 $A_x = A^x$ 、 $A_y = A^y$  および  $A_z = A^z$  である<sup>27</sup>。

例として、ポテンシャルエネルギー  $U = \frac{1}{r}$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $0 < r$ ) の grad を考えてみよう。まず  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$  に注意すると、 $\nabla U$  の各成分は

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dU}{dr} = \frac{x}{r} \left( -\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}, \quad (250)$$

なので、

$$\nabla U = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (251)$$

のようになる。これより  $\nabla U \cdot \mathbf{e}_\theta = \nabla U \cdot \mathbf{e}_\phi = 0$  なので、 $\nabla U$  は  $U$  の等高線に垂直なベクトルを表す。特に保存力は  $\mathbf{F} = -\nabla U = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$  なので、力はポテンシャルの勾配に沿った方向にはたらくことになる。これは  $U$  が一般的な場合でも当てはまることである。実際に  $U$  の等高線に沿った任意のベクトルを  $d\mathbf{r}$  とすると、 $dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r} = 0$  となり、 $\nabla U$  と  $d\mathbf{r}$  は直交することが分かる。

次に rot について考えてみよう。簡単のため rot  $A$  の  $z$  成分  $\partial_x A_y - \partial_y A_x$  を 2次元極座標 (91) で考えることにする。極座標による偏微分は

$$\begin{aligned} \partial_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial r} \partial_y = \cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y, \\ \partial_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \partial_y = -r \sin \theta \partial_x + r \cos \theta \partial_y, \end{aligned} \quad (252)$$

なので、これを逆に解いてあげると

$$\begin{aligned} \partial_x &= \cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta, \\ \partial_y &= \sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta, \end{aligned} \quad (253)$$

を得る。さて、ベクトル  $\mathbf{A}$  の成分は直交座標系では  $(A_x, A_y)$  で与えられる。では極座標の成分表示はどうかというと、ここでは式 (253) のように

$$\begin{aligned} A_x &= \cos \theta A_r - \frac{1}{r} \sin \theta A_\theta, \\ A_y &= \sin \theta A_r + \frac{1}{r} \cos \theta A_\theta, \end{aligned} \quad (254)$$

のように定義する<sup>28</sup>。以上により

$$\begin{aligned} \partial_x A_y - \partial_y A_x &= \left( \cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \right) \left( \sin \theta A_r + \frac{1}{r} \cos \theta A_\theta \right) \\ &\quad - \left( \sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta \right) \left( \cos \theta A_r - \frac{1}{r} \sin \theta A_\theta \right) \\ &= \frac{1}{r} (\partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r), \end{aligned} \quad (255)$$

<sup>27</sup> 添え字の位置には本当は意味がある。特殊相対性理論では添え字の位置はしっかり区別する必要がある。また、 $\sum_i \partial_i A^i = \partial_i A^i$  のように和記号を省略する記法は Einstein の縮約記法と呼ばれる。縮約をとる添え字は必ず上と下でペアにする。

<sup>28</sup>  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 = A_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} A_\theta \mathbf{e}_\theta$  なので、教科書「考える力学」とは異なる定義を採用している。一般相対性理論まで到達すると、式 (254) のように定義するのが自然であることが分かる。

となることが分かる。これより、 $(A_r, A_\theta) = (0, r^2)$  や  $(A_r, A_\theta) = (\sin \theta, 0)$  のように、ベクトルが角度方向に関して非自明な場合に  $\text{rot } \mathbf{A}$  も非自明になる。このため  $\text{rot}$  は回転と呼ばれるのである。

最後に  $\mathbf{F} = -\nabla U = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$  の  $\text{div}$  を計算してみよう。まず  $\partial_x(\partial_x U)$  などは

$$\partial_x(\partial_x U) = -\partial_x\left(\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \quad \partial_y^2 U = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \partial_z^2 U = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}, \quad (256)$$

なので、

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)U = 0, \quad (r \neq 0) \quad (257)$$

となる<sup>29</sup>。一般に

$$\Delta U = 0, \quad \Delta \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2, \quad (258)$$

は Laplace 方程式と呼ばれる偏微分方程式で、その解は調和関数と呼ばれる。 $U = \frac{1}{r}$  は調和関数である。また、微分演算子  $\Delta$  をラプラシアンという。今後よく使うので、ラプラシアンを3次元極座標(202)で表しておこう。極座標による偏微分は

$$\begin{aligned} \partial_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial r} \partial_y + \frac{\partial z}{\partial r} \partial_z = \sin \theta \cos \phi \partial_x + \sin \theta \sin \phi \partial_y + \cos \theta \partial_z, \\ \partial_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \partial_y + \frac{\partial z}{\partial \theta} \partial_z = r \cos \theta \cos \phi \partial_x + r \cos \theta \sin \phi \partial_y - r \sin \theta \partial_z, \\ \partial_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial \phi} \partial_y + \frac{\partial z}{\partial \phi} \partial_z = -r \sin \theta \sin \phi \partial_x + r \sin \theta \cos \phi \partial_y, \end{aligned} \quad (259)$$

なので、これを逆に解いてあげると

$$\begin{aligned} \partial_x &= \sin \theta \cos \phi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \partial_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \sin \phi \partial_\phi, \\ \partial_y &= \sin \theta \sin \phi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \cos \phi \partial_\phi, \\ \partial_z &= \cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta, \end{aligned} \quad (260)$$

を得る。これよりラプラシアンは

$$\begin{aligned} \Delta &= \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2, \end{aligned} \quad (261)$$

となる。この表式は今後よく現れるので、覚えておくと便利である<sup>30</sup>。

<sup>29</sup> $r = 0$  の場合も考慮すると右辺には Dirac のデルタ関数が現れる。

<sup>30</sup>任意の座標系でのラプラシアンは、一般相対論(あるいは Riemann 幾何)により

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_i(\sqrt{g} g^{ij} \partial_j),$$

のように書き表される。ここで  $g_{ij}$  は3次元空間の計量(3×3行列)を表し、 $g$  はその行列式で  $g^{ij}$  は逆行列である。極座標の場合

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g = r^2 \sin \theta, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}, \quad (262)$$

である。

問 19  $\partial_x^2$ 、 $\partial_y^2$  および  $\partial_z^2$  を極座標で表せ。

## B.2 力学に必要な数学の基礎 8 — 線積分、面積分および体積積分

3次元空間において、ある曲線に沿った積分を線積分と呼ぶ。曲線は1次元なのでパラメータ  $s$  でラベルすると、曲線は

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}, \quad (263)$$

によって表される。そして、 $\mathbf{r}(s)$  からパラメータを  $ds$  だけ動かしたときの曲線上の点の変位は

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{pmatrix} ds, \quad (264)$$

のようになる。例として  $(x, y)$  平面内の半径  $R$  の円を考えると、パラメータを  $\theta$  として

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta, \quad (265)$$

となる。

線積分の典型例は、曲線の長さを求める式である。点 A から点 B までの曲線の長さ  $l$  は  $|d\mathbf{r}|$  を足しあげれば得られるので、

$$l = \int_{r_A}^{r_B} |d\mathbf{r}| = \int_{s_A}^{s_B} ds \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|, \quad (266)$$

のように表される。また線積分の別の例として、点 A から点 B までの間に物体にはたらく仕事は

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_A}^{s_B} ds \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (267)$$

のように書くことができる。パラメータ  $s$  はどのようにとってもよいが、特に時間  $t$  と同一視すると式 (159) となる。

次に3次元空間において、面積分と呼ばれるある曲面上の積分を考えよう。曲面は2次元なので、パラメータ  $s^1$  と  $s^2$  でラベルすると、曲面は

$$\mathbf{r}(s^1, s^2) = \begin{pmatrix} x(s^1, s^2) \\ y(s^1, s^2) \\ z(s^1, s^2) \end{pmatrix}, \quad (268)$$

によって表される。そして、 $\mathbf{r}(s^1, s^2)$  からパラメータを  $(ds^1, ds^2)$  だけ動かしたときの曲面上の点の変位は

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} ds^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} ds^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s^1} \\ \frac{\partial y}{\partial s^1} \\ \frac{\partial z}{\partial s^1} \end{pmatrix} ds^1 + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s^2} \\ \frac{\partial y}{\partial s^2} \\ \frac{\partial z}{\partial s^2} \end{pmatrix} ds^2, \quad (269)$$

のようになる。ここでパラメータ曲線に沿ったベクトル  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} ds^1$  と  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} ds^2$  が得られたが、この2つのベクトルの外積をとって新たなベクトル

$$d\mathbf{S} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} ds^1 \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} ds^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial s^1} \frac{\partial z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial s^1} \frac{\partial y}{\partial s^2} \\ \frac{\partial z}{\partial s^1} \frac{\partial x}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s^1} \frac{\partial z}{\partial s^2} \\ \frac{\partial x}{\partial s^1} \frac{\partial y}{\partial s^2} - \frac{\partial y}{\partial s^1} \frac{\partial x}{\partial s^2} \end{pmatrix} ds^1 ds^2, \quad (270)$$

を定義することができる。このベクトルの大きさは2つのベクトルがはる平面の面積と同じであり、向きは平面に対して垂直になる。従って  $d\mathbf{S}$  は、パラメータが  $s^1 \sim s^1 + ds^1$  および  $s^2 \sim s^2 + ds^2$  まで変化したときの、曲面の面積要素を表すベクトルである。例として半径  $R$  の球を考えると、パラメータを  $(\theta, \phi)$  として

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta, \phi) &= \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} = R \mathbf{e}_r, \\ d\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix} d\theta + \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi = R d\theta \mathbf{e}_\theta + R \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (271)$$

である。そして、 $d\mathbf{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$  となる。

面積分の典型例は、曲面の面積を求める式である。曲面の領域  $D$  の面積  $S$  は  $|d\mathbf{S}|$  を足しあげれば得られるので、

$$S = \int_D |d\mathbf{S}| = \int_D ds^1 ds^2 \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} \right|, \quad (272)$$

となる。また別の例を挙げると、曲面の領域  $D$  から単位時間あたりにどれだけ水が流出しているかをはかる量  $-\frac{dQ}{dt}$  は、水の流れを表すベクトルを  $\mathbf{j}$  とすると、面積分を使って

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_D \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_D ds^1 ds^2 \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} \right), \quad (273)$$

のように書き表される。

最後に3次元空間において、体積積分と呼ばれるある立体上での積分を考えよう。立体は3次元なので、パラメータ  $s^1, s^2$  および  $s^3$  でラベルすると、立体は

$$\mathbf{r}(s^1, s^2, s^3) = \begin{pmatrix} x(s^1, s^2, s^3) \\ y(s^1, s^2, s^3) \\ z(s^1, s^2, s^3) \end{pmatrix}, \quad (274)$$

によって表される。そして、 $\mathbf{r}(s^1, s^2, s^3)$  からパラメータを  $(ds^1, ds^2, ds^3)$  だけ動かしたときの立体上の点の変位は

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} ds^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} ds^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^3} ds^3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s^1} \\ \frac{\partial y}{\partial s^1} \\ \frac{\partial z}{\partial s^1} \end{pmatrix} ds^1 + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s^2} \\ \frac{\partial y}{\partial s^2} \\ \frac{\partial z}{\partial s^2} \end{pmatrix} ds^2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s^3} \\ \frac{\partial y}{\partial s^3} \\ \frac{\partial z}{\partial s^3} \end{pmatrix} ds^3, \quad (275)$$

のようになる。ここでパラメータに沿った3つのベクトル  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} ds^1$ 、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} ds^2$  および  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^3} ds^3$  が得られたが、最初の2つのベクトルの外積をとって新たなベクトル

$$d\mathbf{S} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} ds^1 \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} ds^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial s^1} \frac{\partial z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial s^1} \frac{\partial y}{\partial s^2} \\ \frac{\partial z}{\partial s^1} \frac{\partial x}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s^1} \frac{\partial z}{\partial s^2} \\ \frac{\partial x}{\partial s^1} \frac{\partial y}{\partial s^2} - \frac{\partial y}{\partial s^1} \frac{\partial x}{\partial s^2} \end{pmatrix} ds^1 ds^2, \quad (276)$$

を定義することができる。このベクトルの大きさは2つのベクトルがはる平面の面積と同じであり、向きは平面に対して垂直になる。従って  $d\mathbf{S}$  は、パラメータが  $s^1 \sim s^1 + ds^1$  および  $s^2 \sim s^2 + ds^2$  まで変化したときの、曲面の面積要素を表すベクトルである。さらに  $d\mathbf{S}$  と  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^3} ds^3$  の内積の絶対値を考えると

$$\begin{aligned} dV &= d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^3} ds^3 \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial s^1} \frac{\partial y}{\partial s^2} \frac{\partial z}{\partial s^3} + \frac{\partial x}{\partial s^2} \frac{\partial y}{\partial s^3} \frac{\partial z}{\partial s^1} + \frac{\partial x}{\partial s^3} \frac{\partial y}{\partial s^1} \frac{\partial z}{\partial s^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial x}{\partial s^1} \frac{\partial y}{\partial s^3} \frac{\partial z}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s^2} \frac{\partial y}{\partial s^1} \frac{\partial z}{\partial s^3} - \frac{\partial x}{\partial s^3} \frac{\partial y}{\partial s^2} \frac{\partial z}{\partial s^1} \right) ds^1 ds^2 ds^3, \end{aligned} \quad (277)$$

のようなスカラー量が構成できる。これは3つのベクトルがはる立体の体積要素を表す。一般に  $dV$  は負の値になることがあるが、その場合には  $s^1$  と  $s^2$  の役割を入れ替えるなりすることで、正の値にすることができる。従って  $dV$  は必ず正の値をとるものとする。例として3次元極座標表示による立体を考えると、パラメータを  $(r, \theta, \phi)$  として

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(r, \theta, \phi) &= \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = r \mathbf{e}_r, \\ d\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} dr + \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} d\theta + \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \\ &= dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (278)$$

である。そして、 $d\mathbf{S} = r dr d\theta \mathbf{e}_\phi$  および  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  となる。

体積積分の典型例は、立体の体積を求める式である。立体の領域  $E$  の体積  $V$  は  $|dV|$  を足しあげれば得られるので、

$$V = \int_E dV = \int_E ds^1 ds^2 ds^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^3} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} \right), \quad (279)$$



となる。また別の例を挙げると、立体の領域  $E$  において物体が密度  $\rho$  で分布しているとすると、その物体の質量  $M$  は

$$M = \int_E \rho dV = \int_E ds^1 ds^2 ds^3 \rho \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^3} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} \right), \quad (280)$$

のように書き表される。

問 20 半径  $R$  の円の周長を線積分を実行して求めよ。

問 21 半径  $R$  の球の面積を面積分を実行して求めよ。

問 22 半径  $R$  の球の体積を体積積分を実行して求めよ。

### B.3 Stokes の定理と Gauss の定理

線積分と面積分の中に成り立つ関係式として重要な、Stokes の定理

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (281)$$

を証明しよう。この関係式は力学や電磁気学で頻繁に用いる。右辺を定義に基づいて変形していくと

$$\begin{aligned} & \int_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_D ds^1 ds^2 \left\{ (\partial_y F_z - \partial_z F_y)(\partial_1 y \partial_2 z - \partial_1 z \partial_2 y) \right. \\ & \quad + (\partial_z F_x - \partial_x F_z)(\partial_1 z \partial_2 x - \partial_1 x \partial_2 z) \\ & \quad \left. + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)(\partial_1 x \partial_2 y - \partial_1 y \partial_2 x) \right\} \\ &= \int_D ds^1 ds^2 \left\{ \partial_x F_z \partial_1 x \partial_2 z + \partial_y F_z \partial_1 y \partial_2 z - \partial_x F_z \partial_1 z \partial_2 x - \partial_y F_z \partial_1 z \partial_2 y \right. \\ & \quad + \partial_y F_x \partial_1 y \partial_2 x + \partial_z F_x \partial_1 z \partial_2 x - \partial_y F_x \partial_1 x \partial_2 y - \partial_z F_x \partial_1 x \partial_2 z \\ & \quad \left. + \partial_z F_y \partial_1 z \partial_2 y + \partial_x F_y \partial_1 x \partial_2 y - \partial_z F_y \partial_1 y \partial_2 z - \partial_x F_y \partial_1 y \partial_2 x \right\} \\ &= \int_D ds^1 ds^2 \left\{ (\partial_x F_z \partial_1 x + \partial_y F_z \partial_1 y) \partial_2 z - (\partial_x F_z \partial_2 x + \partial_y F_z \partial_2 y) \partial_1 z \right. \\ & \quad + (\partial_y F_x \partial_1 y + \partial_z F_x \partial_1 z) \partial_2 x - (\partial_y F_x \partial_2 y + \partial_z F_x \partial_2 z) \partial_1 x \\ & \quad \left. + (\partial_z F_y \partial_1 z + \partial_x F_y \partial_1 x) \partial_2 y - (\partial_z F_y \partial_2 z + \partial_x F_y \partial_2 x) \partial_1 y \right\} \\ &= \int_D ds^1 ds^2 (\partial_1 F_z \partial_2 z - \partial_2 F_z \partial_1 z + \partial_1 F_x \partial_2 x - \partial_2 F_x \partial_1 x + \partial_1 F_y \partial_2 y - \partial_2 F_y \partial_1 y) \\ &= \int_D ds^1 ds^2 \{ \partial_1 (F_x \partial_2 x + F_y \partial_2 y + F_z \partial_2 z) - \partial_2 (F_x \partial_1 x + F_y \partial_1 y + F_z \partial_1 z) \} \\ &= \int_D ds^1 ds^2 (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1), \quad (282) \end{aligned}$$

のようになる<sup>31</sup>。ただし  $\partial_a = \frac{\partial}{\partial s^a}$  ( $a = 1, 2$ )、および

$$F_a = \partial_a x F_x + \partial_a y F_y + \partial_a z F_z = \partial_a \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}, \quad (283)$$

とおいた。ここでパラメータの取り方は自由なので、 $s^1$  を領域  $D$  の動径方向にとり、 $s^2$  を  $D$  の境界  $C$  に沿った周回方向にとることにする。すると  $s^2$  は周期的なので、上記の積分の2項目は0になる。さらに動径方向の原点では  $F_2 = 0$  となる<sup>32</sup>。以上により

$$\int_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C ds^2 F_2 = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (284)$$

なので、Stokes の定理を示すことができた。

次に、面積分と体積積分の間に成り立つ関係として重要な、Gauss の定理

$$\int_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_E (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV, \quad (285)$$

を証明しよう。ここでは  $3 \times 3$  行列の演算を行う必要があるので、行列の記法について簡単にまとめておく。 $A$  を行列とすると、 $A$  の  $(i, j)$  成分を  $A^i_j$  のように書く。 $A, B$  を行列とし  $X = AB$  とすると、 $X$  の  $(i, j)$  成分は  $X^i_j = \sum_k A^i_k B^k_j$  のようになる。また、 $A, B, C$  を行列とし  $Y = ABC$  とすると、 $Y$  の  $(i, j)$  成分は  $Y^i_j = \sum_{k,l} A^i_k B^k_l C^l_j$  のようになる。 $\sum$  の記号をいちいち書くのは面倒なので、以下ではしばしば

$$X^i_j = A^i_k B^k_j, \quad Y^i_j = A^i_k B^k_l C^l_j, \quad (286)$$

のように書いて、上と下で対になって表れている添え字  $k$  や  $l$  については  $\sum$  をとるものとする。これは Einstein による縮約の記法と呼ばれている。行列  $A$  の行と列を入れ替えたものは転置行列と呼ばれ、 $A^T$  のように書く。成分で書くと  $A^T$  の  $(j, i)$  成分は  $A$  の  $(i, j)$  成分なので、 $(A^T)_j^i = A^i_j$  となる。添え字は行を前に書いて列を後ろに書く。以上のような行列の成分表示を上手く使うと、行列の演算の性質は簡単に理解できる。例えば

$$\begin{aligned} (X^T)_j^i &= X^i_j = A^i_k B^k_j = B^k_j A^i_k = (B^T)_j^k (A^T)_k^i = (B^T A^T)_j^i, \\ (Y^T)_j^i &= Y^i_j = A^i_k B^k_l C^l_j = C^l_j B^k_l A^i_k = (C^T)_j^l (B^T)_l^k (A^T)_k^i = (C^T B^T A^T)_j^i, \end{aligned} \quad (287)$$

である。行列の成分はただの数なので、順番を気にする必要がないことに注意して欲しい。行列のトレースは  $\text{tr} A = A^i_i$  で定義されており、

$$\text{tr}(AB) = A^i_j B^j_i = B^j_i A^i_j = \text{tr}(BA), \quad (288)$$

を満たすことが簡単にわかる。

それでは Gauss の定理を証明しよう。まず、 $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$  とおいて  $3 \times 3$  行列  $M$  を  $M^i_a = \frac{\partial x^i}{\partial s^a}$ 、あるいは具体的に

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial s^1} & \frac{\partial x^1}{\partial s^2} & \frac{\partial x^1}{\partial s^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial s^1} & \frac{\partial x^2}{\partial s^2} & \frac{\partial x^2}{\partial s^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial s^1} & \frac{\partial x^3}{\partial s^2} & \frac{\partial x^3}{\partial s^3} \end{pmatrix} \quad (289)$$

<sup>31</sup> 下から上に変形する方が簡単。

<sup>32</sup> 原点近傍のパラメータを2次元極座標となるように選ぶと、 $\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  および  $\partial_\theta \mathbf{r} = (-r \sin \theta, r \cos \theta)$  なので、原点  $r = 0$  では  $\partial_\theta \mathbf{r} = 0$  である。

のように定義すると、体積要素は

$$\det M \equiv \frac{\partial x^1}{\partial s^1} \frac{\partial x^2}{\partial s^2} \frac{\partial x^3}{\partial s^3} + \frac{\partial x^1}{\partial s^2} \frac{\partial x^2}{\partial s^3} \frac{\partial x^3}{\partial s^1} + \frac{\partial x^1}{\partial s^3} \frac{\partial x^2}{\partial s^1} \frac{\partial x^3}{\partial s^2} - \frac{\partial x^1}{\partial s^1} \frac{\partial x^2}{\partial s^3} \frac{\partial x^3}{\partial s^2} - \frac{\partial x^1}{\partial s^2} \frac{\partial x^2}{\partial s^1} \frac{\partial x^3}{\partial s^3} - \frac{\partial x^1}{\partial s^3} \frac{\partial x^2}{\partial s^2} \frac{\partial x^3}{\partial s^1}, \quad (290)$$

のように  $M$  の行列式で書くことができる。そして、式 (285) の右辺を定義に従って計算すると

$$\begin{aligned} \int_E (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV &= \int_E ds^1 ds^2 ds^3 \det M \partial_i F^i \\ &= \int_E ds^1 ds^2 ds^3 \det M \partial_i s^b \partial_b (\partial_a x^i F^a) \\ &= \int_E ds^1 ds^2 ds^3 \{ \det M \partial_a F^a + \det M (\partial_i s^b \partial_b \partial_a x^i) F^a \}, \end{aligned} \quad (291)$$

となる。ここで  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ 、 $\partial_a = \frac{\partial}{\partial s^a}$  であり、和記号を省略する縮約の記法を用いた。そして  $\partial_i = \partial_i s^b \partial_b$  および  $F^i = \partial_a x^i F^a$  を使った。さらに上式の 2 項目は部分は

$$\det M (\partial_i s^b \partial_b \partial_a x^i) = \partial_a (\det M), \quad (292)$$

となる。証明は後で行うことにして、これを用いると式 (285) の右辺は

$$\int_E (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \int_E ds^1 ds^2 ds^3 \partial_a (\det M F^a), \quad (293)$$

のように表される。パラメータの取り方は自由なので、 $E$  中の適当な点を原点を選んで  $s^1$  を体積  $E$  の動径方向にとり、 $(s^2, s^3)$  を  $E$  の境界  $D$  に沿った角度方向  $(\theta, \phi)$  とする。すると上記の積分のうち、 $s^2$  と  $s^3$  に関する部分は 0 になり、原点では  $\det M = 0$  となるので<sup>33</sup>、

$$\begin{aligned} \int_E (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV &= \int_D ds^2 ds^3 \det M F^1 \\ &= \int_D d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} F^1 \quad \left( d\mathbf{S} = ds^2 ds^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^3} \right) \\ &= \int_D d\mathbf{S} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^1} F^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^2} F^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^3} F^3 \right) \\ &= \int_D d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (294)$$

となり、Gauss の定理を示すことができた。

最後に式 (292) を証明しておこう。 $M$  の余因子行列  $\Delta_i^a$  は

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial s^2} \frac{\partial x^3}{\partial s^3} - \frac{\partial x^2}{\partial s^3} \frac{\partial x^3}{\partial s^2} & \frac{\partial x^2}{\partial s^3} \frac{\partial x^3}{\partial s^1} - \frac{\partial x^2}{\partial s^1} \frac{\partial x^3}{\partial s^3} & \frac{\partial x^2}{\partial s^1} \frac{\partial x^3}{\partial s^2} - \frac{\partial x^2}{\partial s^2} \frac{\partial x^3}{\partial s^1} \\ \frac{\partial x^3}{\partial s^2} \frac{\partial x^1}{\partial s^3} - \frac{\partial x^3}{\partial s^3} \frac{\partial x^1}{\partial s^2} & \frac{\partial x^3}{\partial s^3} \frac{\partial x^1}{\partial s^1} - \frac{\partial x^3}{\partial s^1} \frac{\partial x^1}{\partial s^3} & \frac{\partial x^3}{\partial s^1} \frac{\partial x^1}{\partial s^2} - \frac{\partial x^3}{\partial s^2} \frac{\partial x^1}{\partial s^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial s^2} \frac{\partial x^2}{\partial s^3} - \frac{\partial x^1}{\partial s^3} \frac{\partial x^2}{\partial s^2} & \frac{\partial x^1}{\partial s^3} \frac{\partial x^2}{\partial s^1} - \frac{\partial x^1}{\partial s^1} \frac{\partial x^2}{\partial s^3} & \frac{\partial x^1}{\partial s^1} \frac{\partial x^2}{\partial s^2} - \frac{\partial x^1}{\partial s^2} \frac{\partial x^2}{\partial s^1} \end{pmatrix}, \quad (295)$$

<sup>33</sup>原点近傍から北極方向  $\theta = 0$  および南極方向  $\theta = \pi$  のパラメータを 3 次元極座標と同じになるように選ぶ。すると、 $\partial_i s^1$  は  $r$  に依存せずかつ  $\det M = r^2 \sin \theta$  なので、 $\det M F^1|_{r=0} = 0$  となる。さらに、 $F^2$  は高々  $\frac{1}{r}$  で振る舞いかつ  $\det M = r^2 \sin \theta$  なので、 $\det M F^2|_{\theta=0} = \det M F^2|_{\theta=\pi} = 0$  となる。 $\phi$  方向は周期的なので、 $\det M F^3|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} = 0$  となる。

であり、

$$(\det M)\delta_j^i = M^i_a \Delta_j^a, \quad (296)$$

を満たす。すなわち、 $M^{-1}$  の  $(a, i)$  成分は

$$(M^{-1})^a_i = \frac{1}{\det M} (\Delta^T)^a_i, \quad (297)$$

である。ここで  $\Delta^T$  は  $\Delta$  の転置行列で、 $(\Delta^T)^a_i = \Delta_i^a$  である。一方で  $M^i_a = \frac{\partial x^i}{\partial s^a}$  なので

$$(M^{-1})^a_i = \frac{\partial s^a}{\partial x^i}, \quad (298)$$

である。よって

$$\begin{aligned} \det M \partial_i s^b \partial_b \partial_a x^i &= (\Delta^T)^b_i \partial_a M^i_b \\ &= \partial_a (\det M), \end{aligned} \quad (299)$$

を得る。これで式 (292) の証明は完了した。