

素粒子論 I

百武慶文

平成 28 年 12 月 22 日

目次

1	素粒子物理の概観	3
2	古典電磁気学: U(1) ゲージ理論	5
2.1	Maxwell 方程式	5
2.2	ゲージ場の作用	6
3	自由スカラー場	8
3.1	自由スカラー場の作用	8
3.2	中間子によるポテンシャル	8
4	Dirac 理論	9
4.1	Lorentz 変換とスピノル場の変換	9
4.2	Dirac 場の作用と Dirac 方程式	12
4.3	Dirac 方程式の解	13
4.4	$u^r(\mathbf{p})$ と $v^s(\mathbf{p})$ の関係式	15
4.5	ヘリシティー演算子	16
4.6	Dirac 方程式と g 因子	17
5	自由場の量子化	18
5.1	スカラー場の量子化	18
5.2	Dirac 場の量子化	19
5.3	粒子と反粒子	21
5.4	ゲージ場の量子化 – Coulomb ゲージ	22
5.5	ゲージ場の量子化 – Feynman ゲージ	24
6	散乱断面積と散乱振幅、および LSZ 簡約公式	25
6.1	散乱断面積と散乱振幅	25
6.2	散乱振幅に関する LSZ 簡約公式	28

7	時間順序積の相関関数と散乱振幅の Feynman ルール	31
7.1	相関関数の摂動展開	31
7.2	スカラー場の相関関数	33
7.3	スカラー場の散乱振幅と Feynman ルール	35
7.4	QED における Dirac 場とゲージ場の相関関数	37
7.5	QED の散乱振幅と Feynman ルール	40
8	自発的対称性の破れと Higgs 機構	43
8.1	南部-Goldstone boson	43
8.2	カイラルフェルミオンと自発的対称性の破れ	44
8.3	Higgs 機構	45
8.4	カイラルなゲージ理論における Higgs 機構	46
A	単位系について	48
B	古典力学と対称性	48
B.1	Euler-Lagrange 形式	48
B.2	対称性	49
B.3	対称性と保存則 — Noether の定理	50
C	3次元空間回転とベクトルの記法	51
C.1	ベクトル	51
C.2	テンソル	52
C.3	ベクトル解析の記法	53
D	4次元時空の記法	53
D.1	特殊相対性理論と光速不変の原理	53
D.2	ベクトル	54
D.3	テンソル	55
E	電磁気学の保存量	56
F	量子力学	56
F.1	空間回転 $SO(3)$ とスピノル場の変換	57
F.2	回転対称性と角運動量保存	58
F.3	ゲージ対称性とゲージ相互作用	59

1 素粒子物理の概観

素粒子物理学は 10^{-10}m 以下のミクロな世界を扱う学問である。原子 ($\sim 10^{-10}\text{m}$) や原子核 ($\sim 10^{-15}\text{m}$) の構造をさらに調べていくことで、基本的な物質が何なのかを明らかにし、それらがどのような法則に従うかを理解することが重要な課題である。現在のところ、標準模型と呼ばれる理論が素粒子を記述する理論として完成しており、実験でも非常に高い精度で検証されている。特に標準理論の根幹をなす Higgs 粒子は 2012 年に存在が確認され、大きな話題となったことは記憶に新しい。まずは標準模型を簡単に眺めてみよう。

標準模型に登場する素粒子は「物質を構成する粒子」とそれらの間の「力を媒介する粒子」に大別される。「力を媒介する粒子」はゲージ粒子と呼ばれる。ゲージ粒子はスピン 1 をもつボーズ粒子である。図 1 は標準模型に現れるゲージ粒子を表す。最初にある「 γ 」は光子のことで、数字は質量を表す¹。2 番目の Z ボソン「z」と 3 番目の W ボソン「w」は弱い力を媒介する粒子で、それぞれ大きな質量をもつ。4 番目の「g」はグルーオンで、強い力を媒介する粒子である。これらの粒子は電磁気学および電弱相互作用を拡張した理論形式で記述される。

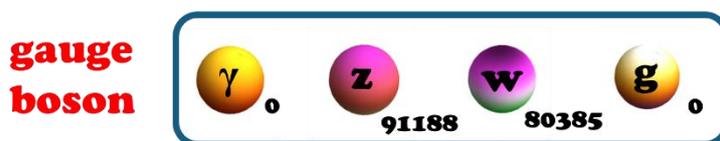


図 1: ゲージ粒子

「物質を構成する粒子」はさらに強い力を受ける「クォーク」と強い力を受けない「レプトン」に分類される。クォークとレプトンはスピン $\frac{1}{2}$ をもつフェルミ粒子である。図 2 は標準模型に現れるクォーク 6 種類の「アップ (u)」、「ダウン (d)」、「チャーム (c)」、「ストレンジ (s)」、「トップ (t)」、「ボトム (b)」を表す。1 列目の (u, d) を第 1 世代、2 列目の (c, s) を第 2 世代と呼び、3 列目の (t, b) を第 3 世代と呼ぶ。3 種類のクォーク模型 (u, d, s) は 1964 年にゲルマンとツバイクによって提唱され、1974 年に小林と益川によって 6 種類の模型へと拡張された。現在では 6 種類のクォークの存在は実験で検証されている。ただしクォークを単独で取り出した訳ではない。クォークの間にはグルーオンによって強い力が働き、クォークを単体で取り出すことはできていない。これはカラー荷の閉じ込めと呼ばれる現象であり、この現象を説明するための理論研究は現在でもなされている。3 つのクォークの束縛状態としては陽子や中性子がある。陽子は「uud」の状態、中性子は「udd」の状態である。陽子や中性子はカラー荷がみえない状態で、我々の世界ではこのような状態のみが観測されている。

図 3 は標準模型に現れるレプトン 6 種類の「電子ニュートリノ (ν_e)」、「電子 (e)」、「ミュー

¹質量の単位は MeV。

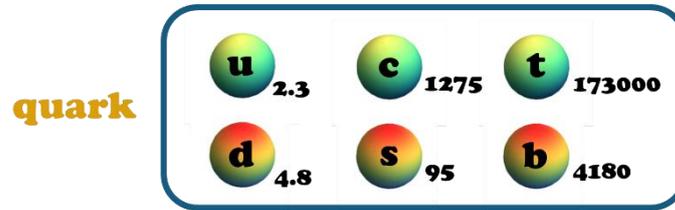


図 2: クォーク

ニュートリノ (ν_μ)、「ミューオン (μ)」、「タウニュートリノ (ν_τ)」、「タウレプトン (τ)」を表す。1 列目の (ν_e, e) を第 1 世代、2 列目の (ν_μ, μ) を第 2 世代と呼び、3 列目の (ν_τ, τ) を第 3 世代と呼ぶ。ニュートリノが質量をもつことは確定しているが、その質量比はスーパーカミオカンデの実験で明らかになっているが、質量の絶対値はまだ測られていない。ニュートリノは超新星爆発の際に大量に放出され、1987 年にカミオカンデは超新星爆発に由来するニュートリノをとらえることに成功した。

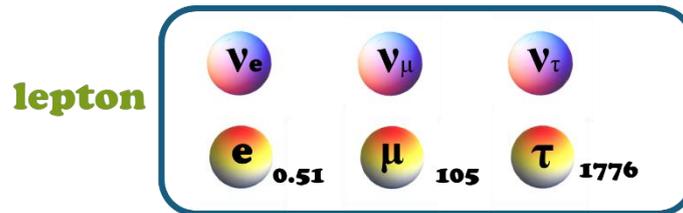


図 3: レプトン

最後に標準模型にはもう一つ素粒子がある。それはヒッグス粒子で 2012 年に実験で検証された。ヒッグスはスピン 0 のボーズ粒子で、ゲージ粒子の W ボソンと Z ボソンやクォークとレプトンに質量を与えるヒッグス機構を引き起こす粒子である。このヒッグス機構は 1960 年頃に南部によって提唱された自発的対称性の破れをゲージ粒子に適用したものである。

この講義では標準模型を理解するために必要な理論の枠組みを詳しく解説する。いわゆる場の量子論の基礎を中心に講義を進める。標準模型をお話としてではなく物理として理解できるように道筋をつけることが、この講義の目標である。

2 古典電磁気学: U(1) ゲージ理論

2.1 Maxwell 方程式

電磁場の古典的な性質は Maxwell 方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

によって記述される。特に以下では真空中を考えることにするが、その場合 $\rho = 0$ 、 $\mathbf{j} = 0$ であり、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H} = \mu_0^{-1} \mathbf{B}$ 、 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ である。真空中の場合に Maxwell 方程式を成分を使って書き下すと、

$$\partial_i E^i = 0, \quad (5)$$

$$\epsilon^{ijk} \partial_j B_k - \frac{1}{c^2} \partial_t E^i = 0, \quad (6)$$

$$\partial_i B^i = 0, \quad (7)$$

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_t B^i = 0, \quad (8)$$

となる。ここで $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ である。 ϵ^{ijk} は完全反対称テンソルであり、回転変換に対して不変である。

次に Maxwell 方程式をベクトルポテンシャルを導入して変形していく。式 (7) と (8) は真空中でなくとも常に成り立つ式なので、これらを書き換えることを考える。まず式 (7) は $B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$ のようにベクトルポテンシャル A_k を導入することで満たすことができる。これを式 (8) に代入すると、 $E_k = \partial_k \phi - \partial_t A_k$ とすればよいことが分かる。ここで新たな場 ϕ を導入した。まとめると、式 (7) と (8) はベクトルポテンシャル (ϕ, A_i) を使って

$$B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k, \quad (9)$$

$$E_i = \partial_i \phi - \partial_t A_i, \quad (10)$$

と変形することができる。ここで (ϕ, A_i) には、(ϕ', A'_i) = ($\phi + \partial_t \chi, A_i + \partial_i \chi$) のように、任意関数 $\chi(t, x)$ だけずらす不定性があることに注意しておく。これはゲージ対称性と呼ばれる局所的な変換で、素粒子物理では物理法則を求める上で重要な役割を果たす。ベクトルポテンシャル (ϕ, A_i) はゲージポテンシャルとも呼ばれる。

式 (9) と (10) を式 (5) と (6) に代入すると

$$\partial_i \partial^i \phi - \partial_t \partial_i A^i = 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t - \partial_j \partial^j \right) A^i + \partial^i \left(-\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \partial_j A^j \right) = 0, \quad (12)$$

が得られる。さらに、先ほど述べたゲージ変換の自由度を使って、

$$-\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \partial_j A^j = 0, \quad (13)$$

となるようにすることができる。これを Lorentz ゲージと呼ぶ。Lorentz ゲージ (13) の下では式 (11) と (12) は

$$\left(-\frac{1}{c^2}\partial_t\partial_t + \partial_j\partial^j\right)\phi = 0, \quad (14)$$

$$\left(-\frac{1}{c^2}\partial_t\partial_t + \partial_j\partial^j\right)A^i = 0, \quad (15)$$

となる。以上により Lorentz ゲージ (13) の下では Maxwell 方程式は、式 (9)、(10)、(14) および (15) で与えられることになる。この式の解として光速 c で伝播する電磁波が存在する。

2.2 ゲージ場の作用

光速不変の原理により、Maxwell 方程式は Lorentz 変換をした後でも同じ方程式となる必要がある。これは Maxwell 方程式が例えば $T^\mu(x) = 0$ のような 4 次元テンソルを用いた式に書けることを意味する。何故ならばこの式を Lorentz 変換すると $\Lambda^\mu{}_\nu T'^\nu(x') = 0$ となるが、左から $(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$ を作用させると $T'^\rho(x') = 0$ が得られるからである。 x' は任意の時空点なので、特に $T'^\mu(x) = 0$ としてもよく、従って方程式の形は Lorentz 変換で不変となる。この節では Maxwell 方程式を 4 次元記法を用いて記述し、Lorentz 変換のもとで方程式の形が変わらないことを確認する。

2.1 節で説明した真空中での Maxwell 方程式 (9)、(10)、(11) および (12) は、4 次元時空の記法を用いると

$$B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k, \quad (16)$$

$$E_i = c\left(\partial_i\left(\frac{\phi}{c}\right) - \partial_0 A_i\right), \quad (17)$$

$$\partial_i\partial^i\left(\frac{\phi}{c}\right) - \partial_0\partial_i A^i = 0, \quad (18)$$

$$-\partial_\mu\partial^\mu A^i + \partial^i\left(-\partial_0\left(\frac{\phi}{c}\right) + \partial_j A^j\right) = 0, \quad (19)$$

と書き換えられる。この式を 4 次元テンソルの形に書き直したい。すぐに思いつくのは $A_0 \equiv \frac{1}{c}\phi$ と定義することである。これにより Maxwell 方程式は

$$B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k, \quad (20)$$

$$E_i = c(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i), \quad (21)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu A_0 - \partial_0\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu(\partial^\mu A_0 - \partial_0 A^\mu) = 0, \quad (22)$$

$$-\partial_\mu\partial^\mu A^i + \partial^i\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu(-\partial^\mu A^i + \partial^i A^\mu) = 0, \quad (23)$$

と書き換えられる。ただし 3 行目において $\partial_0\partial^0 A_0 - \partial_0\partial_0 A^0 = 0$ を使った。

ここまで変形すると反対称テンソルの存在が浮かび上がっているのが分かるだろう。4 次元の反対称テンソルとして

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (24)$$

を導入する。 $F^{\mu\nu}$ はゲージ変換

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x), \quad (25)$$

のもとで不変であることが分かる。また、Bianchi 恒等式

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0, \quad (26)$$

を満たしていることが分かる。式 (20) と (21) より、 $F^{\mu\nu}$ と電磁場の対応は

$$E_i = cF_{i0}, \quad B^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}, \quad (27)$$

のように書き表される。あるいは反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ を 4×4 行列で表記すると

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ -\frac{1}{c}E_1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -\frac{1}{c}E_2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -\frac{1}{c}E_3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

のようになる。そして残りの Maxwell 方程式 (22) と (23) は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (29)$$

のようにまとめて書くことができる。

Maxwell 方程式 (29) を導くような Lagrangian は運動方程式を“積分”することで見つけることができる。具体的には

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu = \partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) - F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu) \sim -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = \delta \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (30)$$

のように計算できる。ここで \sim は全微分項を無視したことを意味する。次元を合わせるように係数を選ぶと作用は

$$S[A^\mu] = -\frac{1}{4\mu_0} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (31)$$

のように与えればよいことが分かる。この作用は Lorentz 変換とゲージ変換の下で不変である。

まとめると電磁気学の作用は式 (31) であり、変分原理によって運動方程式 (29) が得られる。これは Maxwell 方程式の (5) および (6) に相当するものである。また Bianchi 恒等式 (26) は Maxwell 方程式の (7) および (8) に対応している。

問 1 Bianchi 恒等式を示せ。またこの式を電場と磁場で表すとどうなるかを考えよ。

3 自由スカラー場

まずは、最も単純な場であるスカラー場を考える。スカラー場が本当に素粒子として存在するかどうかは長い間不明であったが、2012年に Higgs 粒子が発見されたことで、スカラー場の素粒子が存在することが明らかになった。以下では Peskin の教科書と一致させるのが教育的だと思われるので

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (32)$$

とする。

3.1 自由スカラー場の作用

1930年代前半は核力のような強い力をどのように理解すればよいか盛んに研究されていたが、1935年に湯川秀樹は核力を媒介する粒子として中間子を導入した。湯川のアイデアは後の素粒子の骨格となるもので、陽子や中性子は中間子と呼ばれるスカラー粒子を媒介することで、強い力を交換するとしたのである。スカラー場を $\phi(x)$ とすると、Lorentz 不変な作用は

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \quad (33)$$

で与えられる。変分原理

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \delta\phi - m^2 \phi \delta\phi) \\ &= \int d^4x \{ \partial^\mu (\partial_\mu \phi \delta\phi) - (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi \delta\phi \} = 0, \end{aligned}$$

により運動方程式は

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0, \quad (34)$$

となる。この方程式の解は自由スカラー場の運動を記述するはずであるが、実際に平面波で展開して

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (35)$$

を得る。ただし $p_0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ は相対論的エネルギーの関係を満たす必要がある。また、係数は後々の都合に合わせて選んである。

3.2 中間子によるポテンシャル

次に、陽子や中性子のような核力の源となる物質が空間 \mathbf{x} の原点にある場合を考えよう。このとき運動方程式は

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = g \delta^{(3)}(\mathbf{x}), \quad (36)$$

である。スカラー場 $\phi(x)$ は時間に依存しない関数であるとして

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (37)$$

として方程式に代入すると

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \{(p^2 + m^2)\tilde{\phi}(\mathbf{p}) - g\} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\phi}(\mathbf{p}) = \frac{g}{p^2 + m^2}, \quad (38)$$

となる。ただしここでは $p = |\mathbf{p}|$ である。これより核力の源がつくる場は

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \int \frac{dp d\theta d\phi}{(2\pi)^3} p^2 \sin\theta \frac{g}{p^2 + m^2} e^{-ipr \cos\theta} \\ &= \frac{g}{(2\pi)^2} \int dp dy \frac{p^2}{p^2 + m^2} e^{-ipry} \\ &= \frac{ig}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + m^2} (e^{-ipr} - e^{ipr}) \\ &= -\frac{ig}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p}{p^2 + m^2} e^{ipr} \\ &= \frac{g}{4\pi r} e^{-mr}, \end{aligned} \quad (39)$$

となることがわかる。

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi r} e^{-mr}, \quad (40)$$

は湯川ポテンシャルと呼ばれるポテンシャルエネルギーで、その値は $r \sim \frac{1}{m}$ あたりを境に急激に小さくなる。これは核力が原子核内のみ強く作用する性質と矛盾しておらず、原子核のサイズ $r \sim 10^{-15}$ m を代入すると、 $m \sim 200$ MeV である。実際に観測されたパイ中間子の質量は 140 MeV 程度である。

4 Dirac 理論

物体の運動に関しては、光速に比べて速度が十分小さい場合には Newton 力学がよい近似となっているが、速度が光速近くになる場合には特殊相対性理論に基づく力学を考える必要がある。同様に、電子のようなミクロな物体に関しても、光速に比べて速度が十分小さい場合には量子力学で記述されるが、速度が光速近くになる場合には特殊相対性理論と整合性のある理論を考える必要がある。これは Dirac 理論と呼ばれるものである。この節では Dirac 理論の作用がどのような形で与えられるのかを議論する。

4.1 Lorentz 変換とスピノル場の変換

電磁気学で考察したように、空間回転の 3 次元ベクトル場 A_i は、4 次元時空の Lorentz 変換のベクトル場 A_μ に拡張された。では空間回転の 2 成分スピノル場 ψ はどのように拡

張られるべきだろうか？この節では Lorentz 変換のもとでのスピノル場の変換について考察する。

空間回転の場合を思い出すと、まず重要なのは Lorentz 代数を求めることである。4次元ベクトルについての Lorentz 変換を $\Lambda = e^{-iX}$ ($\Lambda^\mu{}_\nu = (e^{-iX})^\mu{}_\nu$) とすると、

$$\begin{aligned}
\Lambda^T \eta \Lambda = \eta &\Leftrightarrow \Lambda = \eta (\Lambda^T)^{-1} \eta \\
&\Leftrightarrow e^{-iX} = e^{i\eta X^T \eta} \\
&\Leftrightarrow X = -\eta X^T \eta \\
&\Leftrightarrow X^\mu{}_\nu = -\eta^{\mu\rho} (X^T)_\rho{}^\sigma \eta_{\sigma\nu} \\
&\Leftrightarrow X_{\mu\nu} = -X_{\nu\mu},
\end{aligned} \tag{41}$$

となる。従って $X_{\mu\nu}$ は 4×4 反対称行列であるので、実反対称テンソルを使って $X_{\mu\nu} = i\omega_{\mu\nu}$ と書ける。これをさらに変形すると

$$\begin{aligned}
X_{\mu\nu} &= i\omega_{\mu\nu} \\
&= \omega_{\rho\sigma} i\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma \\
&= \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} i(\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho) \\
&= \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (J^{\rho\sigma})_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{42}$$

のように表すことができる。すなわち 4次元ベクトルに作用するとき、 $X^\mu{}_\nu$ は 6個の生成子 $(J^{\rho\sigma})_{\mu\nu}$ の線形結合によって

$$X^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu, \quad (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\eta^{\rho\mu} \delta_\nu^\sigma - \eta^{\sigma\mu} \delta_\nu^\rho), \tag{43}$$

のように表現される。これは、4次元ベクトル表現と呼ばれる。 $J^{\rho\sigma}$ を行列として具体的に表すと

$$\begin{aligned}
J^{01} &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
J^{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{44}$$

である。 $\mathbf{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03})$ は Lorentz boost の生成子であり、 $\mathbf{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12})$ は空間回転の生成子である。Lorentz boost はエルミート行列で書けないことに注意しよう。4

次元ベクトル表現 (43) を使って Lorentz 代数の生成子の交換関係を計算すると

$$\begin{aligned}
[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]^\kappa{}_\lambda &= (J^{\mu\nu})^\kappa{}_\tau (J^{\rho\sigma})^\tau{}_\lambda - (J^{\rho\sigma})^\kappa{}_\tau (J^{\mu\nu})^\tau{}_\lambda \\
&= -(\eta^{\mu\kappa} \delta_\tau^\nu - \eta^{\nu\kappa} \delta_\tau^\mu)(\eta^{\rho\tau} \delta_\kappa^\sigma - \eta^{\sigma\tau} \delta_\kappa^\rho) + (\eta^{\rho\kappa} \delta_\tau^\sigma - \eta^{\sigma\kappa} \delta_\tau^\rho)(\eta^{\mu\tau} \delta_\kappa^\nu - \eta^{\nu\tau} \delta_\kappa^\mu) \\
&= -\eta^{\nu\rho}(\eta^{\mu\kappa} \delta_\lambda^\sigma - \eta^{\sigma\kappa} \delta_\lambda^\mu) + \eta^{\nu\sigma}(\eta^{\mu\kappa} \delta_\lambda^\rho - \eta^{\rho\kappa} \delta_\lambda^\mu) \\
&\quad + \eta^{\mu\rho}(\eta^{\nu\kappa} \delta_\lambda^\sigma - \eta^{\sigma\kappa} \delta_\lambda^\nu) - \eta^{\mu\sigma}(\eta^{\nu\kappa} \delta_\lambda^\rho - \eta^{\rho\kappa} \delta_\lambda^\nu) \\
&= i\eta^{\nu\rho} (J^{\mu\sigma})^\kappa{}_\lambda - i\eta^{\nu\sigma} (J^{\mu\rho})^\kappa{}_\lambda - i\eta^{\mu\rho} (J^{\nu\sigma})^\kappa{}_\lambda + i\eta^{\mu\sigma} (J^{\nu\rho})^\kappa{}_\lambda,
\end{aligned} \tag{45}$$

となる。以上により、Lorentz 代数は

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - i\eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} - i\eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}, \tag{46}$$

となる。

ここでさらに、Lorentz 代数をよりなじみのある代数に書き換えることにしよう。まず \mathbf{K} と \mathbf{J} で代数を構成すると

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ij}{}_k J^k, \quad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ij}{}_k J^k, \quad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ij}{}_k K^k, \tag{47}$$

となる。そして、 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K})$ および $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K})$ とおくと

$$[A^i, A^j] = i\epsilon^{ij}{}_k A^k, \quad [B^i, B^j] = i\epsilon^{ij}{}_k B^k, \quad [A^i, B^j] = 0, \tag{48}$$

となることがわかる。すなわち、 \mathbf{A} と \mathbf{B} はそれぞれ 3 次元空間回転の代数 (SU(2) 代数) をなしており、 $\text{SO}(1,3) \sim \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ である。SU(2) 代数は Pauli 行列を用いて表現を作れるので、Lorentz 代数の新たな表現として

$$A^i = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^i}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^i}{2} \end{pmatrix}, \tag{49}$$

を得る。そして、これを使って \mathbf{K} と \mathbf{J} を求めると

$$\begin{aligned}
K^i &= J^{0i} = \begin{pmatrix} -i\frac{\sigma^i}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{\sigma^i}{2} \end{pmatrix}, \\
J^i &= \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk} J^{jk} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^i}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk} \begin{pmatrix} -\frac{i}{4}[\sigma^j, \sigma^k] & 0 \\ 0 & -\frac{i}{4}[\sigma^j, \sigma^k] \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{50}$$

となる。この表式を眺めると、 $J^{\mu\nu}$ はベクトルの足をもつ行列によって書き表されるような気がする。実際にそれは可能で、ガンマ行列

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}, \tag{51}$$

を導入すると

$$J^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \tag{52}$$

と表される。これを Lorentz 代数のスピンル表現と呼ぶ。スピンル場 ψ は 4 成分場となり、Lorentz 変換は

$$\psi'(x') = \Lambda_{1/2}\psi(x), \quad \Lambda_{1/2} = e^{\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}}, \quad (53)$$

のように与えられる。このように変換する場を Dirac 場と呼ぶ。

最後に、Lorentz 変換のベクトル表現 Λ とスピンル表現 $\Lambda_{1/2}$ の間の関係式

$$\Lambda_{1/2}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{1/2} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad (54)$$

を示しておこう。 $M^\mu(t) = \Lambda_{1/2}^{-t}\gamma^\mu\Lambda_{1/2}^t$ と定義して、 $M^\mu(t)$ を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}M^\mu(t) = -\frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}\Lambda_{1/2}^{-t}[\gamma^{\rho\sigma}, \gamma^\mu]\Lambda_{1/2}^t = \omega^\mu{}_\nu M^\nu(t), \quad (55)$$

となる。従って、これを積分すると

$$M^\mu(t) = (e^{t\omega})^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad (56)$$

となる。ただし $M^\mu(0) = \gamma^\mu$ となることを用いた。 $t=1$ のとき式 (54) が成り立つ。ガンマ行列は定数行列であるが、式 (54) はガンマ行列をスピンル表現で挟んで変換すると、あたかもベクトルのように変換することを表している。

4.2 Dirac 場の作用と Dirac 方程式

4 成分 Dirac 場 $\psi(x)$ に対する作用を構成しよう。そのためには、 ψ から Lorentz スカラーとしてどのようなものが構成可能かを検討する必要がある。まず素朴には $\psi^\dagger\psi$ がスカラーになるような気がするが、これは間違いである。何故ならば、 $\psi^\dagger = \psi^\dagger\Lambda_{1/2}^\dagger$ であるが、式 (50) よりブーストに対しては $\Lambda_{1/2}^\dagger \neq \Lambda_{1/2}^{-1}$ だからである。これは Lorentz 群の表現がユニタリー表現ではないことを意味している。ではどのようにすればスカラーをつくれるだろうか？それにはガンマ行列のエルミート共役が

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \quad (57)$$

のように表されることを利用するとよい。この式より

$$\Lambda_{1/2}^\dagger = e^{\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu\dagger}} = e^{-\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^0\gamma^{\mu\nu}\gamma^0} = \gamma^0\Lambda_{1/2}^{-1}\gamma^0, \quad (58)$$

となることがわかるので、Dirac 共役

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0, \quad (59)$$

を定義すると、 $\bar{\psi}$ の Lorentz 変換は

$$\bar{\psi}' = \psi^\dagger\Lambda_{1/2}^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}\Lambda_{1/2}^{-1}, \quad (60)$$

となる。これより

$$\bar{\psi}\psi, \quad (61)$$

は Lorentz スカラーとなる。さらにこの量は $(\bar{\psi}\psi)^\dagger = \bar{\psi}\psi$ なので実である。

次に微分を含む量でスカラーとなるものを見つけたい。式 (54) より、 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ はベクトルとして振舞うことはわかっているので、これに微分を作用させた

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \quad \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (62)$$

は Lorentz スカラーである。これらの量から実関数を作りたい。前者のエルミート共役は

$$(A\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger = A^*\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\psi = A^*\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (63)$$

なので

$$A\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + A^*\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (64)$$

は実関数である。A の実部に関しては全微分項にまとまるので、無視してよい。

以上により、Dirac 場 ψ に関する作用は

$$\begin{aligned} S[\psi] &= \int d^4x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2} \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \right) \\ &= \int d^4x (i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi), \end{aligned} \quad (65)$$

のように与えられる。変分原理により運動方程式を書き下すと

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0, \quad (66)$$

となる。これは Dirac 方程式と呼ばれるもので、電子のような物質場を記述する基本方程式である。また m は ψ の質量であり、これは運動方程式を解くことで明らかになる。

4.3 Dirac 方程式の解

Maxwell 方程式の解が真空を光速で伝搬する電磁波を予言したように、Dirac 方程式の解は真空を自由に運動する物質の状態を表すと考えられる。それでは実際に、Dirac 方程式 (66) の解を求めることにしよう。まず $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\psi}(p) e^{ip \cdot x}, \quad (67)$$

のように展開して、Dirac 方程式に代入すると

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)\tilde{\psi}(p) = 0, \quad (68)$$

なる代数方程式を得る。ここで $\tilde{\psi}(p)$ が 0 以外の解をもつためには

$$\det(\gamma^\mu p_\mu + m) = 0, \quad (69)$$

となる必要がある。この式に $\det(\gamma^\mu p_\mu - m)$ をかけると

$$0 = \det(\gamma^\mu p_\mu + m) \det(\gamma^\mu p_\mu - m) = \det(\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu - m^2) = (p^2 - m^2)^4, \quad (70)$$

なので、 p_0 は

$$p_0^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2, \quad (71)$$

のように表される。これは質量 m の自由粒子が運動量 \mathbf{p} で運動しているときの相対論的エネルギーに他ならない。以下では符号を固定して

$$p_0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}, \quad (72)$$

とすると、Dirac 方程式の解は $e^{-ip_0 x^0}$ と $e^{ip_0 x^0}$ に依存する項に分かれて

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} (u(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}), \quad (73)$$

のように表され、 $u(\mathbf{p})$ と $v(\mathbf{p})$ は

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad (\gamma^\mu p_\mu + m)v(\mathbf{p}) = 0, \quad (74)$$

を満たす。これは相対論的エネルギー p_0 をもつ自由粒子の平面波解の重ね合わせになっている。

以下では $u(\mathbf{p})$ と $v(\mathbf{p})$ を具体的に求めよう。そのために、ガンマ行列の具体的な表示およびその表示を使った関係式を整理しておく。

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (\mathbf{1}, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\sigma^i), \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1} \end{pmatrix}, \\ p_\mu p_\nu \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu &= p^2 \mathbf{1} = m^2 \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (75)$$

まず

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \chi \\ \chi' \end{pmatrix}, \quad (76)$$

とにおいて、式 (74) の 1 式目に代入しよう。計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} -m\mathbf{1} & p_\mu \sigma^\mu \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu & -m\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \chi' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -m\chi + p_\mu \sigma^\mu \chi' \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu \chi - m\chi' \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (77)$$

となり、これを満たすには

$$\chi = \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi, \quad \chi' = \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi, \quad (78)$$

とおけばよい。($\sqrt{p_\mu \sigma^\mu}$ および $\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}$ の具体的な表式は 4.5 節で与える。) ξ は任意の 2 成分場なので、基底として ξ^r ($r = 1, 2$) を選び

$$\xi^{r\dagger} \xi^s = \delta^{rs}, \quad \sum_{s=1}^2 \xi^s \xi^{s\dagger} = \mathbf{1}, \quad (79)$$

のように規格直交化する。すると $u(\mathbf{p})$ は

$$u(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^2 a_{\mathbf{p}}^r u^r(\mathbf{p}), \quad u^r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi^r \\ \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi^r \end{pmatrix}, \quad (80)$$

のように表される。 $a_{\mathbf{p}}^r$ は線形結合の係数である。

次に

$$v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \chi \\ \chi' \end{pmatrix}, \quad (81)$$

とにおいて、式 (74) の 2 式目に代入しよう。計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} m\mathbf{1} & p_\mu \sigma^\mu \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu & m\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \chi' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m\chi + p_\mu \sigma^\mu \chi' \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu \chi + m\chi' \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (82)$$

となり、これを満たすには

$$\chi = \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi, \quad \chi' = -\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi, \quad (83)$$

とおけばよい。 ξ^r を用いると $v(\mathbf{p})$ は

$$v(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^2 b_{\mathbf{p}}^{r\dagger} v^r(\mathbf{p}), \quad v^r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi^r \\ -\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi^r \end{pmatrix}, \quad (84)$$

のように表される。 $b_{\mathbf{p}}^{r\dagger}$ は線形結合の係数である。

最終的に Dirac 方程式の古典解は

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \sum_{r=1}^2 (a_{\mathbf{p}}^r u^r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{r\dagger} v^r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}), \quad (85)$$

のようになる。

4.4 $u^r(\mathbf{p})$ と $v^s(\mathbf{p})$ の関係式

$u^r(\mathbf{p})$ と $v^s(\mathbf{p})$ の関係式は今後の計算で必要なので、ここにまとめておこう。まず、 $u^r(\mathbf{p})$ と $v^s(\mathbf{p})$ は

$$u^r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi^r \\ \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi^r \end{pmatrix}, \quad v^s(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi^s \\ -\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi^s \end{pmatrix}, \quad (86)$$

であり、エルミート共役は

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p}) = \left(\xi^{r\dagger} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \quad \xi^{r\dagger} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \right), \quad v^{s\dagger}(\mathbf{p}) = \left(\xi^{s\dagger} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \quad -\xi^{s\dagger} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \right), \quad (87)$$

となる。Dirac 共役は

$$\bar{u}^r(\mathbf{p}) = \left(\xi^{r\dagger} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \quad \xi^{r\dagger} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \right), \quad \bar{v}^s(\mathbf{p}) = \left(-\xi^{s\dagger} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \quad \xi^{s\dagger} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \right), \quad (88)$$

である。内積を計算すると

$$\begin{aligned} \bar{u}^r(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) &= 2m\delta^{rs}, & \bar{v}^r(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) &= -2m\delta^{rs}, \\ \bar{u}^r(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) &= 0, & \bar{v}^r(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) &= 0, \\ u^{r\dagger}(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) &= 2p_0\delta^{rs}, & v^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) &= 2p_0\delta^{rs}, \\ u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) &= 0, & v^{r\dagger}(\mathbf{p})u^s(-\mathbf{p}) &= 0, \end{aligned} \quad (89)$$

を得る。また、完全性の関係式として

$$\sum_{r=1}^2 u^r(\mathbf{p})\bar{u}^r(\mathbf{p}) = p_\mu \gamma^\mu + m, \quad \sum_{r=1}^2 v^r(\mathbf{p})\bar{v}^r(\mathbf{p}) = p_\mu \gamma^\mu - m, \quad (90)$$

を得る。

4.5 ヘリシティー演算子

ここで $\sqrt{p_\mu \sigma^\mu}$ および $\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}$ の具体的な表式を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} &= \sqrt{p_0 \mathbf{1} + p_i \sigma^i} \\ &= \sqrt{p_0} \sqrt{\mathbf{1} + \frac{p_i \sigma^i}{p_0}} \\ &= \frac{\sqrt{p_0}}{2} \left(\sqrt{\mathbf{1} + \frac{p_i \sigma^i}{p_0}} + \sqrt{\mathbf{1} - \frac{p_i \sigma^i}{p_0}} \right) + \frac{\sqrt{p_0}}{2} \left(\sqrt{\mathbf{1} + \frac{p_i \sigma^i}{p_0}} - \sqrt{\mathbf{1} - \frac{p_i \sigma^i}{p_0}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{p_0}}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|}{p_0}} + \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{p}|}{p_0}} \right) \mathbf{1} + \frac{\sqrt{p_0}}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|}{p_0}} - \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{p}|}{p_0}} \right) \frac{p_i \sigma^i}{|\mathbf{p}|} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} + \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \right) \mathbf{1} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} - \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \right) \frac{p_i \sigma^i}{|\mathbf{p}|}, \\ \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} + \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \right) \mathbf{1} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} - \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \right) \frac{p_i \sigma^i}{|\mathbf{p}|}, \end{aligned} \quad (91)$$

となる。そこで ξ^r を $-p_i \sigma^i / |\mathbf{p}|$ の固有関数にすると便利である。

$$-\frac{p_i \sigma^i}{|\mathbf{p}|} \xi^\pm = \pm \xi^\pm. \quad (92)$$

ここで、helicity 演算子と呼ばれる

$$h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{p_i \sigma^i}{|\mathbf{p}|} & 0 \\ 0 & -\frac{p_i \sigma^i}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix}, \quad (93)$$

を導入すると、

$$hu^\pm(\mathbf{p}) = \pm \frac{1}{2} u^\pm(\mathbf{p}), \quad (94)$$

となる。 $h = -\frac{1}{2}$ を左手巻きスピノルと呼び、 $h = \frac{1}{2}$ を右手巻きスピノルと呼ぶ。

ただし、Dirac 場の質量が 0 でないときは h は慣性系の選び方によることを注意しておく。例えば $p^1 = p^2 = 0$ かつ $p^3 > 0$ のとき

$$h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \xi^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

となる。しかし、Dirac 場は光速未満の速度で運動しているので、Lorentz boost を施した系で $p^1 = p^2 = 0$ かつ $p^3 < 0$ となるようにできる。すると h に負号がついてきて left と right の役割が入れ替わってしまう。

Dirac 場の質量がゼロのときは、上記のような慣性系の選びなおしはできない。従ってこのときは h は慣性系によらないよい保存量であり、 $p_0 = p^3$ ($p^1 = p^2 = 0$) とすると

$$u^+(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2p_0} \xi^+ \end{pmatrix}, \quad u^-(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2p_0} \xi^- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (96)$$

となる。下 2 成分のみのゼロ質量場を右手巻き Weyl スピノルと呼び、上 2 成分のみのゼロ質量場を左手巻き Weyl スピノルと呼ぶ。

4.6 Dirac 方程式と g 因子

ゲージ対称性を備える Dirac 場の作用は

$$S[\psi] = \int d^4x \bar{\psi} (i\hbar \gamma^\mu D_\mu - mc) \psi, \quad D_\mu = \partial_\mu - i \frac{e}{\hbar} A_\mu \quad (97)$$

で与えられる。相対論的な波動方程式の解と非相対論的な波動方程式の解には

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar} (\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} t - p_i x^i)} &= e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} e^{-\frac{i}{\hbar} ((\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2) t - p_i x^i)} \\ &\sim e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} t - p_i x^i \right)} \end{aligned} \quad (98)$$

なる関係がある。これに注意して

$$\psi = e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (99)$$

とにおいて作用に代入すると

$$\begin{aligned} S[\xi, \chi] &= \int d^4x \begin{pmatrix} \xi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 (i\hbar\gamma^\mu D_\mu + mc\gamma^0 - mc) \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \int d^4x \begin{pmatrix} \xi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i\hbar}{c} D_t & i\hbar\sigma^i D_i \\ i\hbar\sigma^i D_i & \frac{i\hbar}{c} D_t + 2mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (100)$$

のようになる。ただし $D_t = cD_0$ である。ここで非相対論的近似を行う。 $\frac{i\hbar}{c} D_t + 2mc \sim 2mc$ と近似すると

$$\begin{aligned} S[\xi, \chi] &\sim \int d^4x \begin{pmatrix} \xi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i\hbar}{c} D_t & i\hbar\sigma^i D_i \\ i\hbar\sigma^i D_i & 2mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &\sim \int d^4x \left\{ 2mc \left(\chi + \frac{i\hbar}{2mc} \sigma^i D_i \xi \right)^\dagger \left(\chi + \frac{i\hbar}{2mc} \sigma^i D_i \xi \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} \left(i\hbar\xi^\dagger D_t \xi - \frac{\hbar^2}{2m} (D_i \xi)^\dagger \sigma^i \sigma^j D_j \xi \right) \right\} \\ &\sim \int dt d^3x \left\{ \frac{i\hbar}{2} \xi^\dagger D_t \xi - \frac{i\hbar}{2} (D_t \xi)^\dagger \xi - \frac{\hbar^2}{2m} (D_i \xi)^\dagger \sigma^i \sigma^j D_j \xi \right\}. \end{aligned} \quad (101)$$

最後の式変形では χ は補助場なので運動方程式を使って消去した。この式は式 (330) と一致しており、これより $g = 2$ は Dirac 方程式から自然に説明できたことになる。

5 自由場の量子化

5.1 スカラー場の量子化

3節で説明した古典スカラー場についてまとめると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0, \\ \phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}). \end{aligned} \quad (102)$$

ただし $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ である。場についてフーリエ変換を行うと

$$a_{\mathbf{p}} = \int d^3x \left(\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \phi(x) + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \dot{\phi}(x) \right) e^{ip \cdot x}, \quad (103)$$

となる。

スカラー場 $\phi(x)$ の量子化を考えよう。場の量子化については、空間の各点に力学的自由度が存在すると考えてよいので、まずはそれに対応する共役運動量を構成する。

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}). \quad (104)$$

そして、空間の各点で独立に同時刻での交換関係を設定する。

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (105)$$

この交換関係によって $a_{\mathbf{p}}$ と $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ は演算子となり、

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] &= [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0, \end{aligned} \quad (106)$$

を満たす。このような交換関係に従う粒子を Bose 粒子と呼ぶ。調和振動子のときと同様に、 $a_{\mathbf{p}}$ は消滅演算子で $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ は生成演算子である。実際にハミルトニアンを計算すると

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2 + \nabla\phi \cdot \nabla\phi + m^2\phi^2) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \left\{ - (E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) (a_{\mathbf{p}}e^{-ip \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) (a_{\mathbf{q}}e^{-iq \cdot x} - a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq \cdot x}) \right. \\ &\quad \left. + m^2 (a_{\mathbf{p}}e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) (a_{\mathbf{q}}e^{-iq \cdot x} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq \cdot x}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \left\{ - (E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - m^2) (a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}e^{-i(p+q) \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{i(p+q) \cdot x}) \right. \\ &\quad \left. + (E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + m^2) (a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i(p-q) \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} e^{i(p-q) \cdot x}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]), \end{aligned} \quad (107)$$

となる。最後の項の定数は発散するが、これは空間の各点にある調和振動子の零点エネルギーの和と考えることができる。エネルギーの基準点は自由に選ぶことができるので、真空 $|0\rangle$ を $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$ で定義して、真空のエネルギーを 0 とする。真空に生成演算子を n 個作用させた状態は

$$H(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger)|0\rangle = (E_{\mathbf{p}_1} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n})(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger)|0\rangle, \quad (108)$$

となり、自由に運動する n 個の粒子のエネルギー固有状態であることがわかる。Bose 粒子は同じ状態をとることができる。例えば n 個の粒子がすべて同じ運動量をとるような状態が可能である。このようにあるエネルギー準位に複数の粒子が重複できる統計性を Bose-Einstein 統計と呼ぶ。

5.2 Dirac 場の量子化

4 節で説明した Dirac 場についてまとめると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0, \\ \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{r=1}^2 (a_{\mathbf{p}}^r u^r(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{r\dagger} v^r(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}). \end{aligned} \quad (109)$$

ただし $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ である。場についてフーリエ変換を行うと

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^r &= \int d^3x \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} u^{r\dagger}(\mathbf{p}) \psi(x) e^{ip \cdot x}, \\ b_{\mathbf{p}}^r &= \int d^3x \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \psi^\dagger(x) v^r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}, \end{aligned} \quad (110)$$

となる。

Dirac 場 $\psi^\alpha(x)$ の量子化を考えよう。場の量子化については、空間の各点に力学的自由度が存在すると考えてよいので、まずはそれに対応する共役運動量 $\pi_\alpha(x)$ を構成する。

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger \\ &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{r=1}^2 (b_{\mathbf{p}}^r v^{r\dagger}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} u^{r\dagger}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}). \end{aligned} \quad (111)$$

そして、空間の各点で独立に同時刻での反交換関係を設定する。

$$\{\psi^\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_\beta(t, \mathbf{y})\} = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_\beta^\alpha. \quad (112)$$

この交換関係によって $a_{\mathbf{p}}$ と $b_{\mathbf{p}}$ は演算子となり、

$$\begin{aligned} \{a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} &= (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ \{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} &= (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (113)$$

を満たす。これ以外の反交換関係は 0 である。このような反交換関係に従う粒子を Fermi 粒子と呼ぶ。反交換関係より

$$(a_{\mathbf{q}}^{r\dagger})^2 = (b_{\mathbf{q}}^{r\dagger})^2 = 0, \quad (114)$$

となる。これは以下で確認するように、Fermi 粒子は同一状態に 2 個以上はいることができない、という Pauli の排他原理を表している。

調和振動子のときと同様に、 $a_{\mathbf{p}}^r$ と $b_{\mathbf{p}}^r$ は消滅演算子で $a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}$ と $b_{\mathbf{p}}^{r\dagger}$ は生成演算子である。実

際にハミルトニアンを計算すると

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x (\pi\dot{\psi} - \mathcal{L}) \\
&= \int d^3x \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m)\psi \\
&= i \int d^3x \psi^\dagger \dot{\psi} \\
&= \int d^3x \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \sum_{r,s=1}^2 (b_p^r v^{r\dagger}(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x} + a_p^{r\dagger} u^{r\dagger}(\mathbf{p}) e^{ip\cdot x}) (a_q^s u^s(\mathbf{q}) e^{-iq\cdot x} - b_q^{s\dagger} v^s(\mathbf{q}) e^{iq\cdot x}) \\
&= \int d^3x \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \sum_{r,s=1}^2 (b_p^r a_q^s v^{r\dagger}(\mathbf{p}) u^s(\mathbf{q}) e^{-i(p+q)\cdot x} - a_p^{r\dagger} b_q^{s\dagger} u^{r\dagger}(\mathbf{p}) v^s(\mathbf{q}) e^{i(p+q)\cdot x} \\
&\quad - b_p^r b_q^{s\dagger} v^{r\dagger}(\mathbf{p}) v^s(\mathbf{q}) e^{-i(p-q)\cdot x} + a_p^{r\dagger} a_q^s u^{r\dagger}(\mathbf{p}) u^s(\mathbf{q}) e^{i(p-q)\cdot x}) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_{r=1}^2 (a_p^{r\dagger} a_p^r - b_p^r b_p^{r\dagger}) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_{r=1}^2 (a_p^{r\dagger} a_p^r + b_p^{r\dagger} b_p^r - \{b_p^r, b_p^{r\dagger}\}), \tag{115}
\end{aligned}$$

となる。最後の項の定数は負で発散するが、これは空間の各点にある調和振動子の零点エネルギーの和と考えることができる。エネルギーの基準点は自由に選ぶことができるので、真空 $|0\rangle$ を $a_p^r|0\rangle = b_p^r|0\rangle = 0$ で定義して、真空のエネルギーを 0 とする。真空に生成演算子 $a_p^{r\dagger}$ あるいは $b_p^{r\dagger}$ を作用させた状態は

$$H a_p^{r\dagger}|0\rangle = E_p a_p^{r\dagger}|0\rangle, \quad H b_p^{r\dagger}|0\rangle = E_p b_p^{r\dagger}|0\rangle, \tag{116}$$

となり、自由に運動する粒子のエネルギー固有状態であることがわかる。 $a_p^{r\dagger}$ で生成される状態を粒子と呼び、 $b_p^{r\dagger}$ で生成される状態を反粒子と呼ぶ。粒子と反粒子には $r = 1, 2$ の内部自由度があり、これがスピンの自由度である。式 (114) から明らかなように、Fermi 粒子は同じ状態をとることができない。これは量子力学で Pauli の排他原理と呼ばれるもので、このような統計性を Fermi-Dirac 統計と呼ぶ。

5.3 粒子と反粒子

Dirac 場を量子化すると、粒子と反粒子のエネルギー固有状態が対で現れた。ではこの同じエネルギー状態にある粒子と反粒子の違いは何だろうか？これをみるために、まず電荷を Noether の定理により構成する。

Dirac 場の Lagrangian は U(1) 変換

$$\psi'(x) = e^{i\theta} \psi(x), \quad \delta\psi(x) = i\theta\psi(x), \tag{117}$$

の下で不変である。Lagrangian の微小変化分を運動方程式 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ およびその

共役をとった $-i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0$ を使って計算すると

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\delta\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\delta\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\delta\psi \\ &= \partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu\delta\psi) \\ &= -\theta\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi),\end{aligned}\tag{118}$$

となる。対称性を使って $\delta\mathcal{L}$ を評価すると 0 なので、結局カレントは

$$j^\mu = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\tag{119}$$

であり、保存電荷は

$$\begin{aligned}Q &= -\int d^3x\psi^\dagger\psi \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^2 (-a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}a_{\mathbf{p}}^r + b_{\mathbf{p}}^{r\dagger}b_{\mathbf{p}}^r + \{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{p}}^{r\dagger}\}),\end{aligned}\tag{120}$$

のように表される。従って

$$Qa_{\mathbf{p}}^{r\dagger}|0\rangle = -a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}|0\rangle, \quad Qb_{\mathbf{p}}^{r\dagger}|0\rangle = +b_{\mathbf{p}}^{r\dagger}|0\rangle,\tag{121}$$

となるので、粒子は負電荷をもち、反粒子は正電荷をもつことがわかる。つまり、粒子と反粒子は質量とエネルギーが同じで、電荷の符号が反対の状態である。Dirac 理論は反粒子の存在を予言したといえるが、1932 年に C. D. Anderson は電子の反粒子である陽電子を霧箱による宇宙線観測で発見した。

5.4 ゲージ場の量子化 – Coulomb ゲージ

2 節で電磁気学の古典論を解説した。電磁気学は Lorentz 対称性を備えた理論であり、Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\tag{122}$$

で与えられる。ゲージ場 $A_\mu(x)$ が力学的変数であり、これを量子化したい。しかしながら、Lagrangian には \dot{A}_i はあるものの、 \dot{A}_0 は存在しない。従って A_0 に対する共役運動量を構成できないことになる。そこで、ゲージ変換 $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi$ を使って

$$A_0 = 0, \quad \partial_i A^i = 0,\tag{123}$$

のように A_μ の自由度を固定する。これをゲージ固定とよび、特に上式のゲージ固定を Coulomb ゲージと呼ぶ。Coulomb ゲージにおける Lagrangian は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \\ &= -\frac{1}{2}\partial_0 A_i\partial^0 A^i - \frac{1}{2}\partial_i A_j(\partial^i A^j - \partial^j A^i) \\ &= -\frac{1}{2}\partial_0 A_i\partial^0 A^i - \frac{1}{2}\partial_i A_j\partial^i A^j + \frac{1}{2}\partial_i(A_j\partial^j A^i) \\ &\sim -\frac{1}{2}\partial_\mu A_i\partial^\mu A^i,\end{aligned}\tag{124}$$

となる。力学的変数は $A^i(x)$ だが、さらに $\partial_i A^i = 0$ という拘束がある。しかし、 \dot{A}^i は存在するので、共役運動量を構成することができる。ゲージ対称性は相互作用を決定するうえで強力だが、一方で量子化の際には拘束系の量子化をするという面倒なことになるのである。

A^i に対する運動方程式は

$$\partial_\mu \partial^\mu A^i = 0, \quad (125)$$

である。これは自由場の運動方程式なので、運動量 \mathbf{p} の平面波解として

$$A^i(x) \sim \epsilon^i(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + \epsilon^{i*}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}, \quad (126)$$

のように解くことができる。ただし $p^0 = E_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|$ である。 $\epsilon^i(\mathbf{p})$ は偏光ベクトルと呼ばれる3成分のベクトルであるが、ゲージ固定条件 $\partial_i A^i = 0$ より $p_i \epsilon^i(\mathbf{p}) = 0$ を満たす必要がある。これは偏光ベクトルのうち縦波の自由度が落ちて横波の自由度だけでかけることを表す。横波の基底ベクトルを $\epsilon^{ri}(\mathbf{p})$ ($r = 1, 2$) とし

$$\epsilon_i^{r*}(\mathbf{p})\epsilon^{si}(\mathbf{p}) = -\delta^{rs}, \quad \sum_{r=1}^2 \epsilon^{ri}(\mathbf{p})\epsilon_j^{r*}(\mathbf{p}) = -\delta_j^i + \frac{p^i p_j}{p^k p_k}, \quad (127)$$

のように規格化されているとする。すると $\epsilon^i(\mathbf{p})$ は

$$\epsilon^i(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^2 a_{\mathbf{p}}^r \epsilon^{ri}(\mathbf{p}), \quad (128)$$

のように線形結合で表される。以上により式 (125) の一般解は

$$A^i(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{r=1}^2 (a_{\mathbf{p}}^r \epsilon^{ri}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \epsilon^{ri*}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}), \quad (129)$$

で与えられる。係数は量子化の際に都合のよいように調整した。 $A^i(x)$ の共役運動量を $\pi_i(x)$ とすると

$$\begin{aligned} \pi_i(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = -\dot{A}_i \\ &= i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \sum_{r=1}^2 (a_{\mathbf{p}}^r \epsilon_i^r(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \epsilon_i^{r*}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}), \end{aligned} \quad (130)$$

となる。

それでは準備が整ったのでゲージ場の量子化を実行しよう。ただし、今回は拘束条件があるので、 $[A^i(t, \mathbf{x}), \pi_j(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ では駄目である。そこで、まず

$$[a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (131)$$

が与えられているとして、 $A^i(x)$ と $\pi_i(x)$ の同時刻交換関係を導くことにする。

$$\begin{aligned}
[A^i(t, \mathbf{x}), \pi_j(t, \mathbf{y})] &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}}}} \sum_{r,s=1}^2 \left\{ -\epsilon^{ri}(\mathbf{p}) \epsilon_j^{s*}(\mathbf{q}) [a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \right. \\
&\quad \left. + \epsilon^{ri*}(\mathbf{p}) \epsilon_j^s(\mathbf{q}) [a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}, a_{\mathbf{q}}^s] e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \right\} \\
&= \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^2 \left\{ -\epsilon^{ri}(\mathbf{p}) \epsilon_j^{r*}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - \epsilon^{ri*}(\mathbf{p}) \epsilon_j^r(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right\} \\
&= i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\delta_j^i - \frac{p^i p_j}{p^k p_k} \right) e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \tag{132}
\end{aligned}$$

これがゲージ場の正準交換関係である。これに ∂_i を作用させるとたしかに 0 となるので、拘束条件を満たしている。

ハミルトニアンを計算すると

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3 x (\pi_i \dot{A}^i - \mathcal{L}) \\
&= \int d^3 x \left(-\frac{1}{2} \dot{A}_i \dot{A}^i + \frac{1}{2} \partial_j A_i \partial^j A^i \right) \\
&= \int d^3 x \left(\frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} B^2 \right) \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_{r=1}^2 a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^r. \tag{133}
\end{aligned}$$

となる。真空 $|0\rangle$ を $a_{\mathbf{p}}^r |0\rangle = 0$ で定義して、真空のエネルギーを 0 とする。真空に生成演算子 $a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}$ を作用させた状態は

$$H a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} |0\rangle = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} |0\rangle, \tag{134}$$

となり、自由に運動する光子のエネルギー固有状態であることがわかる。光子が横波 2 自由度の粒子で、エネルギーは振動数 $E_{\mathbf{p}}$ で与えられる。

5.5 ゲージ場の量子化 – Feynman ゲージ

前節で電磁気学の量子化を行った。ただし共変性は失われていた。この節では共変性を保った量子化を行う。そこで、Lorentz ゲージ

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{135}$$

を課すことにする。すると A_μ の運動方程式は

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0, \tag{136}$$

となるので、変分原理でこれを出すように Lagrangian を

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{137}$$

のように修正する。上記のような作用に基づく量子化は Feynman ゲージによる量子化と呼ばれる。

式 (136) の一般解は

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}^r \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \epsilon_r^{\mu*}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}), \quad (138)$$

で与えられる。ただし、 r について縮約を取っており、偏光ベクトルは

$$\epsilon_\mu^{r*}(\mathbf{p}) \epsilon_s^\mu(\mathbf{p}) = \delta_s^r, \quad \epsilon^{r\mu}(\mathbf{p}) \epsilon_{r\nu}^*(\mathbf{p}) = \delta_\nu^\mu, \quad (139)$$

のように規格化されているとする。場についてフーリエ変換を行うと

$$a_{\mathbf{p}}^r = \int d^3x \left(\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \epsilon_\mu^{r*}(\mathbf{p}) A^\mu(x) + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \epsilon_\mu^{r*}(\mathbf{p}) \dot{A}^\mu(x) \right) e^{ip \cdot x}, \quad (140)$$

となる。

$A^\mu(x)$ の共役運動量を $\pi_\mu(x)$ とすると

$$\pi_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = F_{\mu 0} - g_{\mu 0} \partial_\nu A^\nu = \begin{cases} -\dot{A}^0 - \partial_i A^i \\ -\dot{A}_i + \partial_i A_0 \end{cases}, \quad (141)$$

となる。今回は π_0 は 0 にならない。そこで、正準量子化 $[A^\mu(t, \mathbf{x}), \pi_\nu(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_\nu^\mu$ を適用すると

$$[\dot{A}_\nu(t, \mathbf{y}), A^\mu(t, \mathbf{x})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_\nu^\mu, \quad (142)$$

である。これより、生成消滅演算子の交換関係は

$$[a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] = -(2\pi)^3 \eta^{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (143)$$

となる。これが共変性を保った正準交換関係である。しかしながら、この関係から、状態には負ノルムの状態 $a_{\mathbf{p}}^{0\dagger}|0\rangle$ が存在することがわかる。これは量子論の確立解釈を揺るがすので大きな問題であるが、負ノルムの状態は Lorentz ゲージに相当する条件

$$p_\mu \epsilon^{r\mu}(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^r | \text{phys} \rangle = 0, \quad (144)$$

を課すことによって、物理状態から排除することができる。

6 散乱断面積と散乱振幅、および LSZ 簡約公式

6.1 散乱断面積と散乱振幅

素粒子実験では光速近くまで加速した粒子を衝突させ、散乱によって飛び出した粒子を検出する。実験によって測定できるのは散乱断面積と呼ばれる量である。散乱断面積は次のように定義される。まず、粒子 1 からなる粒子密度 ρ_1 のビーム 1 と、粒子 2 からなる粒

子密度 ρ_2 のビーム 2 の衝突実験を考える。ビームは円柱状で断面積が S であり、相対速度は \bar{v} であるとしよう。時間 T の間に衝突が起こったとすると、この間にビームが重なる体積は $V = \bar{v}TS$ であり、ビーム 1 には $N_1 = \rho_1 V$ 個、ビーム 2 には $N_2 = \rho_2 V$ 個の粒子が含まれていたことになる。ここで、粒子 1 から見て粒子 2 の広がり σ の面積であったとすると、粒子 1 が粒子 2 に散乱される確率は σ/S である。よって散乱される粒子数は

$$N = N_1 N_2 \frac{\sigma}{S} = (VT)\rho_1 \rho_2 \bar{v} \sigma, \quad (145)$$

である。 σ は散乱断面積と呼ばれるもので、実験によって測定可能な物理量である。実験では散乱された粒子が飛んでくる方向や運動量も測定できるので、それらの値に応じて散乱される粒子数を

$$dN = (VT)\rho_1 \rho_2 \bar{v} d\sigma, \quad (146)$$

のように表しておくことと便利である。 $d\sigma$ は微分散乱断面積と呼ばれる。

上記の粒子数を場の理論の言葉で表すために、散乱前後の漸近状態を導入しよう。粒子の散乱過程において、散乱より十分前の時刻 $t \rightarrow -\infty$ における入射粒子は相互作用の影響が無視できるため、自由場のように振る舞うと考えられる。この状態を in 状態と呼ぶ。同様に、散乱より十分後の時刻 $t \rightarrow \infty$ における散乱粒子も相互作用の影響が無視できるため、自由場のように振る舞うと考えられる。この状態を out 状態と呼ぶ。

相互作用も考慮した真空を $|\Omega\rangle$ で表すことにする。スカラー場 ϕ について、in 状態と out 状態を具体的に記述すると

$$\begin{aligned} \phi_{\text{in/out}}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\text{in/out}} \mathbf{p} e^{-ip \cdot x} + a_{\text{in/out}}^\dagger \mathbf{p} e^{ip \cdot x}), \quad (147) \\ |\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_m\rangle_{\text{in}} &= \prod_{i=1}^m \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} a_{\text{in } \mathbf{p}_i}^\dagger |\Omega\rangle, \quad \text{out } \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | = \langle \Omega | \prod_{j=1}^n \sqrt{2E_{\mathbf{k}_j}} a_{\text{out } \mathbf{k}_j}, \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\phi_{\text{in}}(x)$ は $x^0 \rightarrow -\infty$ 、 $\phi_{\text{out}}(x)$ は $x^0 \rightarrow \infty$ で定義されている。重要な注意点としては、in 状態と out 状態は粒子間での相互作用は切れているが²、自己相互作用は切れていないということである。これにより、in 状態と out 状態の粒子の質量と波動関数は繰り込みを受ける。すなわち、質量 m は実際に観測される量で書かれており、また波動関数は $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_0(x) \sim \sqrt{Z_\phi} \phi_{\text{in}}(x)$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_0(x) \sim \sqrt{Z_\phi} \phi_{\text{out}}(x)$ 、となる²。

Dirac 場についても同様に、in 状態と out 状態を構成することができる。特に全て Dirac 場の粒子の場合に書くと

$$\begin{aligned} \psi_{\text{in/out}}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=1}^2 (a_{\text{in/out}}^r \mathbf{p} u^r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\text{in/out}}^{r\dagger} \mathbf{p} v^r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}), \quad (148) \\ |\mathbf{p}_1^{r_1} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m}\rangle_{\text{in}} &= \prod_{i=1}^m \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} a_{\text{in } \mathbf{p}_i}^{r_i\dagger} |\Omega\rangle, \quad \text{out } \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | = \langle \Omega | \prod_{j=1}^n \sqrt{2E_{\mathbf{k}_j}} a_{\text{out } \mathbf{k}_j}^{s_j}, \end{aligned}$$

となる。反粒子も混ざった場合には、反粒子の箇所を $a_{\text{in } \mathbf{p}_i}^{r_i\dagger}$ から $b_{\text{in } \mathbf{p}_i}^{r_i\dagger}$ に置き換えればよい。波動関数は $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi_0(x) \sim \sqrt{Z_\psi} \psi_{\text{in}}(x)$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_0(x) \sim \sqrt{Z_\psi} \psi_{\text{out}}(x)$ 、となる。

²以下では、Lagrangian に現れる量に添え字 0 をつける。 m_0 は裸の質量と呼ばれ、 m とは異なる。

ゲージ場については Feynman ゲージによる量子化を考えることにする。ゲージ場について in 状態と out 状態を構成すると

$$A_{\text{in/out}}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\text{in/out}}^{r\mu}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a_{\text{in/out}}^{r\mu\dagger}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}), \quad (149)$$

$$|\mathbf{p}_1^{r_1} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m}\rangle_{\text{in}} = \prod_{i=1}^m \sqrt{2E_{p_i}} a_{\text{in } p_i}^{r_i\dagger} |\Omega\rangle, \quad \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | = \langle \Omega | \prod_{j=1}^n \sqrt{2E_{k_j}} a_{\text{out } k_j}^{s_j},$$

となる。波動関数は $\lim_{t \rightarrow -\infty} A_0^\mu(x) \sim \sqrt{Z_A} A_{\text{in}}^\mu(x)$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} A_0^\mu(x) \sim \sqrt{Z_A} A_{\text{out}}^\mu(x)$ 、となる。

以上の準備のもと、粒子 1 のビームと粒子 2 のビームの衝突によって散乱される粒子数を場の理論の言葉で表すと以下ようになる。

$$dN = \prod_{j=1}^n \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_j^0} |\text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | \mathbf{p}_1^{r_1} \mathbf{p}_2^{r_2} \rangle_{\text{in}}|^2. \quad (150)$$

運動量の保存則を考慮して、散乱振幅 \mathcal{M} を

$$\text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | \mathbf{p}_1^{r_1} \mathbf{p}_2^{r_2} \rangle_{\text{in}} = i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^2 p_i - \sum_{j=1}^n k_j \right), \quad (151)$$

のように導入すると、散乱される粒子数は

$$dN = \prod_{j=1}^n \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_j^0} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^2 p_i - \sum_{j=1}^n k_j \right) VT, \quad (152)$$

のように書き表される。最終的に、式 (146) と式 (152) を比較すると、2 体から n 体へ散乱する微分散乱断面積の表式として

$$d\sigma = \frac{1}{2p_1^0 2p_2^0 \bar{v}} \prod_{j=1}^n \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_j^0} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^2 p_i - \sum_{j=1}^n k_j \right), \quad (153)$$

を得る。ただし、 $\rho_1 = 2p_1^0$ 、 $\rho_2 = 2p_2^0$ を用いた。以上により、微分散乱断面積を理論的に求めるためには、散乱振幅を計算できればよいことになる。そして、次の分節で述べるように、散乱振幅は時間順序積の相関関数の計算によって求めることができる。

この分節を終了する前に、ラザフォード散乱の計算などで必要なので、ビーム 1 とビーム 2 が衝突して 2 つの粒子が散乱した場合を考えておこう。重心系 ($E_{\text{cm}} = p_1^0 + p_2^0$, $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$) で散乱断面積を評価すると

$$\begin{aligned} \int d\sigma &= \frac{1}{2p_1^0 2p_2^0 \bar{v}} \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6 2k_1^0 2k_2^0} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(E_{\text{cm}} - k_1^0 - k_2^0) \\ &= \frac{1}{2p_1^0 2p_2^0 \bar{v}} \int \frac{d^3k_1}{16\pi^2 k_1^0 k_2^0} |\mathcal{M}|^2 \delta(E_{\text{cm}} - k_1^0 - k_2^0) \\ &= \frac{1}{2p_1^0 2p_2^0 \bar{v}} \int \frac{d\Omega |\mathbf{k}_1|^2}{16\pi^2 k_1^0 k_2^0} |\mathcal{M}|^2 \left(\frac{|\mathbf{k}_1|}{k_1^0} + \frac{|\mathbf{k}_1|}{k_2^0} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2p_1^0 2p_2^0 \bar{v}} \int \frac{d\Omega |\mathbf{k}_1|}{16\pi^2 E_{\text{cm}}} |\mathcal{M}|^2, \end{aligned} \quad (154)$$

となる。ただし、2行目以降では $k_1^0 = \sqrt{|\mathbf{k}_1|^2 + m_1^2}$ 、 $k_2^0 = \sqrt{|\mathbf{k}_1|^2 + m_2^2}$ および $k_1^0 + k_2^0 = E_{\text{cm}}$ である。ビームは x^3 方向に運動しているとする、相対速度は運動量を用いて

$$\bar{v} = \left| \frac{p_1^3}{p_1^0} - \frac{p_2^3}{p_2^0} \right| = \frac{|p_2^0 p_1^3 - p_1^0 p_2^3|}{p_1^0 p_2^0} = \frac{E_{\text{cm}} |\mathbf{p}_1|}{p_1^0 p_2^0}, \quad (155)$$

のように表される。従って、微分散乱断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{cm}} = \frac{|\mathbf{k}_1|}{64\pi^2 E_{\text{cm}}^2 |\mathbf{p}_1|} |\mathcal{M}|^2, \quad (156)$$

のようになる。特に粒子の質量が全て同じ場合には、 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{k}_1|$ となる。

6.2 散乱振幅に関する LSZ 簡約公式

時間順序積 T で並んだ演算子 $T\{\mathcal{O}(x)\}$ が、in 状態と out 状態に挟まれた量を計算しよう。計算としては、生成消滅演算子を場に置き換えて S 行列を時間順序積の相関関数で表現する、という流れである。これにより、散乱振幅も時間順序積の相関関数で表すことができるのである。

まずはスカラー場について考えてみよう。計算の詳細は以下の通りである。

$$\begin{aligned} & \text{out} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | T\{\mathcal{O}(x)\} | \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_m \rangle_{\text{in}} \\ &= \text{out} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | T\{\mathcal{O}(x)\} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\text{in } \mathbf{p}_1}^\dagger | \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_m \rangle_{\text{in}} \\ &= \text{out} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | [T\{\mathcal{O}(x)\} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\text{in } \mathbf{p}_1}^\dagger - \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\text{out } \mathbf{p}_1}^\dagger T\{\mathcal{O}(x)\}] | \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_m \rangle_{\text{in}} \\ &= \int d^3x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | [T\{\mathcal{O}(x)\} (E_{\mathbf{p}_1} \phi_{\text{in}}(x_1) - i\dot{\phi}_{\text{in}}(x_1)) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow -\infty} \\ &\quad - (E_{\mathbf{p}_1} \phi_{\text{out}}(x_1) - i\dot{\phi}_{\text{out}}(x_1)) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow \infty} T\{\mathcal{O}(x)\}] | \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_m \rangle_{\text{in}} \\ &= -Z_\phi^{-1/2} \int d^4x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | \partial_{x_1^0} T\{\mathcal{O}(x)\} (E_{\mathbf{p}_1} \phi_0(x_1) - i\dot{\phi}_0(x_1)) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow \infty} \Big| \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_m \rangle_{\text{in}} \\ &= iZ_\phi^{-1/2} \int d^4x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | T\{\mathcal{O}(x)\} (E_{\mathbf{p}_1}^2 \phi_0(x_1) + \ddot{\phi}_0(x_1)) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow \infty} \Big| \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_m \rangle_{\text{in}} \\ &= iZ_\phi^{-1/2} \int d^4x_1 e^{-ip_1 \cdot x_1} (\square_{x_1} + m^2) \text{out} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | T\{\mathcal{O}(x)\} \phi_0(x_1) \Big|_{x_1^0 \rightarrow \infty} \Big| \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_m \rangle_{\text{in}} \\ &= (iZ_\phi^{-1/2})^{m+n} \prod_{i=1}^m \int d^4x_i e^{-ip_i \cdot x_i} (\square_{x_i} + m^2) \prod_{j=1}^n \int d^4y_j e^{ik_j \cdot y_j} (\square_{y_j} + m^2) \\ &\quad \langle \Omega | T\{\phi(y_1) \cdots \phi_0(y_n) \mathcal{O}(x) \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_m)\} | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (157)$$

3行目で $a_{\text{out } \mathbf{p}_1}^\dagger$ の項を加えたが、これはブラの真空に当たってゼロとなる項である。6行目では時間に関する $\pm\infty$ の値を積分によって表し、繰り込みの効果を考慮した。7行目から8行目へ行くには、運動量を空間微分にして部分積分を行った。上式は Lehmann, Symanzik, Zimmermann により導かれた公式で、LSZ 簡約公式と呼ばれる。特に、 $\mathcal{O}(x) = 1$ とおく

と、スカラー粒子が m 個入射して n 個散乱される散乱振幅 \mathcal{M} は、相関関数を用いて

$$\begin{aligned}
& i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^m p_i - \sum_{j=1}^n k_j \right) \\
&= \text{out} \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_m \rangle_{\text{in}} \\
&= (iZ_\phi^{-1/2})^{m+n} \prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{-ip_i \cdot x_i} (\square_{x_i} + m^2) \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} (\square_{y_j} + m^2) \\
& \quad \langle \Omega | T \{ \phi_0(y_1) \cdots \phi_0(y_n) \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_m) \} | \Omega \rangle, \tag{158}
\end{aligned}$$

のように表すことができる。つまり、散乱振幅は相関関数を計算することによって得られることが分かる。

Dirac 場についての LSZ 簡約公式は以下の通りである。ただし、in 状態と out 状態は全て Dirac 場の粒子であるとする。

$$\begin{aligned}
& \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T \{ \mathcal{O}(x) \} | \mathbf{p}_1^{r_1} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T \{ \mathcal{O}(x) \} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\text{in } \mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | [T \{ \mathcal{O}(x) \} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\text{in } \mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger} - \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\text{out } \mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger} T \{ \mathcal{O}(x) \}] | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= \int d^3 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | [T \{ \mathcal{O}(x) \} \psi_{\text{in}}^\dagger(x_1) u^{r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow -\infty} \\
& \quad - \psi_{\text{out}}^\dagger(x_1) u^{r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow \infty} T \{ \mathcal{O}(x) \}] | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= -Z_\psi^{-1/2} \int d^4 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | \partial_{x_1^0} T \{ \mathcal{O}(x) \bar{\psi}_0(x_1) \gamma^0 u^{r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} \} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= iZ_\psi^{-1/2} \int d^4 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T \{ \mathcal{O}(x) (\bar{\psi}_0(x_1) \gamma^0(p_1)_0 + i\partial_0^{x_1} \bar{\psi}_0(x_1) \gamma^0) u^{r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} \} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= iZ_\psi^{-1/2} \int d^4 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T \{ \mathcal{O}(x) (i\partial_\mu^{x_1} \bar{\psi}_0(x_1) \gamma^\mu + m \bar{\psi}_0(x_1)) u^{r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} \} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= (iZ_\psi^{-1/2})^{m+n} \prod_{i=1}^m \int d^4 x_i \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} \bar{u}^{s_j}(\mathbf{k}_j) (-i\gamma^\mu \partial_\mu^{y_j} + m) \tag{159}
\end{aligned}$$

$$\langle \Omega | T \{ \psi_0(y_1) \cdots \psi_0(y_n) \mathcal{O}(x) \bar{\psi}_0(x_1) \cdots \bar{\psi}_0(x_m) \} | \Omega \rangle (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu^{x_i} + m) u^{r_i}(\mathbf{p}_i) e^{-ip_i \cdot x_i}.$$

3 行目で $a_{\text{out } \mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger}$ の項を加えたが、これはブラの真空に当たってゼロとなる項である。6 行目では時間に関する $\pm\infty$ の値を積分によって表し、繰り込みの効果を考慮した。7 行目から 8 行目へ移る際には、 $u^{r_1}(\mathbf{p}_1)$ が満たす式 (74) を用い、運動量を微分で表して部分積分を行った。特に、 $\mathcal{O}(x) = 1$ とおくと、Dirac 場の粒子が m 個入射して n 個散乱される散

乱振幅 \mathcal{M} は、相関関数を用いて

$$\begin{aligned}
& i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^m p_i - \sum_{j=1}^n k_j \right) \\
&= \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | \mathbf{p}_1^{r_1} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= (iZ_\psi^{-1/2})^{m+n} \prod_{i=1}^m \int d^4 x_i \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} \overline{u^{s_j}}(\mathbf{k}_j) (-i\gamma^\mu \partial_\mu^{y_j} + m) \\
&\quad \langle \Omega | T \{ \psi_0(y_1) \cdots \psi_0(y_n) \overline{\psi}_0(x_1) \cdots \overline{\psi}_0(x_m) \} | \Omega \rangle (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu^{x_i} + m) u^{r_i}(\mathbf{p}_i) e^{-ip_i \cdot x_i}, \quad (160)
\end{aligned}$$

のように表される。

同様に、in 状態と out 状態が全て Dirac 場の反粒子である場合の LSZ 簡約公式は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
& \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T \{ \mathcal{O}(x) \} | \mathbf{p}_1^{r_1} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T \{ \mathcal{O}(x) \} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} b_{\text{in}\mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | [T \{ \mathcal{O}(x) \} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} b_{\text{in}\mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger} - \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} b_{\text{out}\mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger} T \{ \mathcal{O}(x) \}] | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= \int d^3 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | [T \{ \mathcal{O}(x) \} v^{r_1 \dagger}(\mathbf{p}_1) \psi_{\text{in}}(x_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow -\infty} \\
&\quad - v^{r_1 \dagger}(\mathbf{p}_1) \psi_{\text{out}}(x_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow \infty} T \{ \mathcal{O}(x) \}] | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= -Z_\psi^{-1/2} \int d^4 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | \partial_{x_1^0} T \{ \mathcal{O}(x) \overline{v}^{r_1}(\mathbf{p}_1) \gamma^0 \psi_0(x_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} \} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= iZ_\psi^{-1/2} \int d^4 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T \{ \mathcal{O}(x) \overline{v}^{r_1}(\mathbf{p}_1) (\gamma^0(p_1)_0 \psi_0(x_1) + i\gamma^0 \partial_0^{x_1} \psi_0(x_1)) e^{-ip_1 \cdot x_1} \} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= iZ_\psi^{-1/2} \int d^4 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T \{ \mathcal{O}(x) e^{-ip_1 \cdot x_1} \overline{v}^{r_1}(\mathbf{p}_1) (i\gamma^\mu \partial_\mu^{x_1} - m) \psi_0(x_1) \} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= (-iZ_\psi^{-1/2})^{m+n} \prod_{i=1}^m \int d^4 x_i \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{-ip_i \cdot x_i} \overline{v}^{r_i}(\mathbf{p}_i) (-i\gamma^\mu \partial_\mu^{x_i} + m) \\
&\quad \langle \Omega | T \{ \overline{\psi}_0(y_1) \cdots \overline{\psi}_0(y_n) \mathcal{O}(x) \psi_0(x_1) \cdots \psi_0(x_m) \} | \Omega \rangle (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu^{y_j} + m) v^{s_j}(\mathbf{k}_j) e^{ik_j \cdot y_j}. \quad (161)
\end{aligned}$$

3 行目で $b_{\text{out}\mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger}$ の項を加えたが、これはブラの真空に当たってゼロとなる項である。6 行目では時間に関する $\pm\infty$ の値を積分によって表し、繰り込みの効果を考慮した。7 行目から 8 行目へ移る際には、 $v^{r_1}(\mathbf{p}_1)$ が満たす式 (74) を用い、運動量を微分で表して部分積分を行った。特に、 $\mathcal{O}(x) = 1$ とおくと、Dirac 場の反粒子が m 個入射して n 個散乱される散乱振幅 \mathcal{M} は、相関関数を用いて

$$\begin{aligned}
& i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^m p_i - \sum_{j=1}^n k_j \right) \\
&= \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | \mathbf{p}_1^{r_1} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= (-iZ_\psi^{-1/2})^{m+n} \prod_{i=1}^m \int d^4 x_i \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{-ip_i \cdot x_i} \overline{v}^{r_i}(\mathbf{p}_i) (-i\gamma^\mu \partial_\mu^{x_i} + m) \\
&\quad \langle \Omega | T \{ \overline{\psi}_0(y_1) \cdots \overline{\psi}_0(y_n) \psi_0(x_1) \cdots \psi_0(x_m) \} | \Omega \rangle (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu^{y_j} + m) v^{s_j}(\mathbf{k}_j) e^{ik_j \cdot y_j}, \quad (162)
\end{aligned}$$

のように表すことができる。

最後に、ゲージ場についての LSZ 簡約公式は以下の通りである。ただし、Feynman ゲージをとっている。

$$\begin{aligned}
& \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T\{\mathcal{O}(x)\} | \mathbf{p}_1^{r_1} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T\{\mathcal{O}(x)\} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\text{in } \mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | [T\{\mathcal{O}(x)\} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\text{in } \mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger} - \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} a_{\text{out } \mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger} T\{\mathcal{O}(x)\}] | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= \int d^3 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | [T\{\mathcal{O}(x)\} \epsilon_{\mu}^{r_1}(\mathbf{p}_1) (E_{\mathbf{p}_1} A_{\text{in}}^{\mu}(x_1) - i\dot{A}_{\text{in}}^{\mu}(x_1)) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow -\infty} \\
&\quad - \epsilon_{\mu}^{r_1}(\mathbf{p}_1) (E_{\mathbf{p}_1} A_{\text{out}}^{\mu}(x_1) - i\dot{A}_{\text{out}}^{\mu}(x_1)) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow \infty} T\{\mathcal{O}(x)\}] | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= -Z_A^{-1/2} \int d^4 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | \partial_{x_1^0} T\{\mathcal{O}(x)\} \epsilon_{\mu}^{r_1}(\mathbf{p}_1) (E_{\mathbf{p}_1} A_0^{\mu}(x_1) - i\dot{A}_0^{\mu}(x_1)) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow \infty} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= iZ_A^{-1/2} \int d^4 x_1 \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T\{\mathcal{O}(x)\} \epsilon_{\mu}^{r_1}(\mathbf{p}_1) (E_{\mathbf{p}_1}^2 A_0^{\mu}(x_1) + \ddot{A}_0^{\mu}(x_1)) e^{-ip_1 \cdot x_1} \Big|_{x_1^0 \rightarrow \infty} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= iZ_A^{-1/2} \int d^4 x_1 e^{-ip_1 \cdot x_1} \epsilon_{\mu}^{r_1}(\mathbf{p}_1) \square_{x_1} \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | T\{\mathcal{O}(x)\} A_0^{\mu}(x_1) \Big|_{x_1^0 \rightarrow \infty} | \mathbf{p}_2^{r_2} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= (iZ_A^{-1/2})^{m+n} \prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{-ip_i \cdot x_i} \epsilon_{\mu_i}^{r_i}(\mathbf{p}_i) \square_{x_i} \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} \epsilon_{\nu_j}^{s_j^*}(\mathbf{k}_j) \square_{y_j} \\
&\quad \langle \Omega | T\{A_0^{\nu_1}(y_1) \cdots A_0^{\nu_n}(y_n) \mathcal{O}(x) A_0^{\mu_1}(x_1) \cdots A_0^{\mu_m}(x_m)\} | \Omega \rangle. \tag{163}
\end{aligned}$$

3 行目で $a_{\text{out } \mathbf{p}_1}^{r_1 \dagger}$ の項を加えたが、これはブラの真空に当たってゼロとなる項である。6 行目では時間に関する $\pm\infty$ の値を積分によって表し、繰り込みの効果を考慮した。7 行目から 8 行目へ移る際には、運動量を微分で表して部分積分を行った。特に、 $\mathcal{O}(x) = 1$ とおくと、光子が m 個入射して n 個散乱される散乱振幅 \mathcal{M} は、相関関数を用いて

$$\begin{aligned}
& i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^m p_i - \sum_{j=1}^n k_j \right) \\
&= \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \cdots \mathbf{k}_n^{s_n} | \mathbf{p}_1^{r_1} \cdots \mathbf{p}_m^{r_m} \rangle_{\text{in}} \\
&= (iZ_A^{-1/2})^{m+n} \prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{-ip_i \cdot x_i} \epsilon_{\mu_i}^{r_i}(\mathbf{p}_i) \square_{x_i} \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} \epsilon_{\nu_j}^{s_j^*}(\mathbf{k}_j) \square_{y_j} \\
&\quad \langle \Omega | T\{A_0^{\nu_1}(y_1) \cdots A_0^{\nu_n}(y_n) A_0^{\mu_1}(x_1) \cdots A_0^{\mu_m}(x_m)\} | \Omega \rangle, \tag{164}
\end{aligned}$$

のように表される。

7 時間順序積の相関関数と散乱振幅の Feynman ルール

7.1 相関関数の摂動展開

この分節では時間順序積における相関関数を、摂動的に計算する手法を解説する。簡単のため、スカラー場 ϕ による説明を行うが、Dirac 場やゲージ場でも同様である。計算し

たいのは n 点相関関数

$$\langle \Omega | T \{ \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \} | \Omega \rangle, \quad (165)$$

である。念のため注意しておくが、 $\phi_0(x)$ は Lagrangian に現れる場である。

まず、ハミルトニアンを自由場の部分と相互作用の部分に分けて考える。

$$H = H_{\text{free}} + H_{\text{int}}. \quad (166)$$

H は時間によらないので、時刻 $t = 0$ におけるスカラー場で書き表されているとしてよい。時刻 t におけるスカラー場 $\phi_0(x) = \phi_0(t, \mathbf{x})$ は、時間並進演算子を用いて

$$\phi_0(x) = e^{iHt} \phi_0(0, \mathbf{x}) e^{-iHt}, \quad (167)$$

のように表される。ここで、時刻 $t = 0$ におけるスカラー場 $\phi_0(0, \mathbf{x})$ を自由場のハミルトニアンのみで並進変換したものを

$$\phi_I(x) = e^{iH_{\text{free}}t} \phi_0(0, \mathbf{x}) e^{-iH_{\text{free}}t}, \quad (168)$$

のように定義する。これを相互作用描像の場と呼ぶ。相互作用描像の場はハミルトニアンの自由場の部分のみで時間発展しているので、基本的に自由場と同じように生成消滅演算子を使って表すことができる。つまり、この $\phi_I(x)$ は解けている。さて、相互作用描像の場を用いると $\phi_0(x)$ は

$$\phi_0(x) = U(t)^\dagger \phi_I(x) U(t), \quad U(t) \equiv e^{iH_{\text{free}}t} e^{-iHt}, \quad (169)$$

のように表される。そこで、 $\phi_0(x)$ を解くには $U(t)$ を解く必要がある。そして、 $U(t)$ は以下の微分方程式

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = -iH_I(t)U(t), \quad H_I(t) \equiv e^{iH_{\text{free}}t} H_{\text{int}}(\phi_0(0)) e^{-iH_{\text{free}}t} = H_{\text{int}}(\phi_I(t)), \quad (170)$$

を満たすので、摂動的に

$$\begin{aligned} U(t) &= 1 - i \int_0^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \cdots \\ &= 1 - i \int_0^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 T \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \} + \cdots \\ &= T \left\{ e^{-i \int_0^t dt' H_I(t')} \right\}, \end{aligned} \quad (171)$$

のようになる。ただし、時間順序積を利用した。以上により、スカラー場 $\phi_0(x)$ は相互作用描像の場 $\phi_I(x)$ によって記述できることが分かった。

次に、真空 $|\Omega\rangle$ について考えよう。自由場のハミルトニアン H_{free} に関する真空を $|0\rangle$ ($H_{\text{free}}|0\rangle = 0$) とすると、

$$\begin{aligned} U^\dagger(-T)|0\rangle &= e^{-iHT}|0\rangle = e^{-iE_0T}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n|0\rangle, \\ \langle 0|U(T) &= \langle 0|e^{-iHT} = e^{-iE_0T}\langle 0|\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_nT}\langle 0|n\rangle\langle n|, \end{aligned} \quad (172)$$

となる。そこで、時間 T を複素に拡張して極限操作を取ると

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} U^\dagger(-T)|0\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT}|0\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iE_0T}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle, \\ \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0|U(T) &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0|e^{-iHT} = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iE_0T}\langle 0|\Omega\rangle\langle\Omega|,\end{aligned}\quad (173)$$

あるいは

$$\begin{aligned}|\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0T}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1}U^\dagger(-T)|0\rangle, \\ \langle\Omega| &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0T}\langle 0|\Omega\rangle\right)^{-1}\langle 0|U(T),\end{aligned}\quad (174)$$

である。

以上により、 n 点相関関数を相互作用描像の場 ϕ_I を用いて記述することができる。実際に式 (165) に式 (169) および (174) を代入すると

$$\begin{aligned}\langle\Omega|T\{\phi_0(x_1)\cdots\phi_0(x_n)\}|\Omega\rangle &\quad (x_1^0 > \cdots > x_n^0) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|U(T)U(t_1)^\dagger\phi_I(x_1)U(t_1)\cdots U(t_n)^\dagger\phi_I(x_n)U(t_n)U^\dagger(-T)|0\rangle}{e^{-2iE_0T}\langle 0|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)e^{-i\int_{-T}^T dt H_I(t)}\}|0\rangle}{\langle 0|T\{e^{-i\int_{-T}^T dt H_I(t)}\}|0\rangle},\end{aligned}\quad (175)$$

である。すなわち、相関関数は自由場の相関関数を使って摂動的に計算できるのである。詳細は割愛するが、分母は真空からの寄与を表し、分子のそれを丁度打ち消してくれる。結果、 n 点相関関数には $x_i (i = 1, \dots, n)$ に連結したものが寄与する。

7.2 スカラー場の相関関数

ここではスカラー場の Lagrangian を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4, \quad (176)$$

のように選んで話を進める。これは ϕ^4 理論と呼ばれる。 ϕ^4 理論におけるスカラー場 $\phi_0(x)$ の相関関数を考えよう。

まず、 $\phi_I(x)$ は自由場なので、生成消滅演算子を使って

$$\begin{aligned}\phi_I(x) &= \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x), \\ \phi_I^+(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p e^{-ip\cdot x}, \quad \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^\dagger e^{ip\cdot x},\end{aligned}\quad (177)$$

のように展開できる。ただし、 $E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_0^2}$ である。計算したいのは時間順序積の相関関数で、例えば 2 つの場の時間順序積は

$$T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\} = \begin{cases} \phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^+(x)\phi_I^-(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y), & (x^0 > y^0), \\ \phi_I^+(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^+(y)\phi_I^-(x) + \phi_I^-(y)\phi_I^-(x), & (x^0 < y^0), \end{cases}\quad (178)$$

である。相関関数を求めるには、相互作用描像の場 ϕ_I の時間順序積を真空中で挟むのだから、 ϕ_I^+ を右、 ϕ_I^- を左になるように並べ替えると便利である。このような順序を正規順序 (normal ordering) と呼ぶ。例えば、2つの場の正規順序積は

$$N\{\phi_I(x)\phi_I(y)\} = \phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y), \quad (179)$$

のように表す。すると、時間順序積と正規順序積の関係は

$$T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\} = N\{\phi_I(x)\phi_I(y)\} + \overline{\phi_I(x)\phi_I(y)}, \quad (180)$$

のようになる。ただし、最後の項は Wick 縮約と呼ばれるもので、

$$\overline{\phi_I(x)\phi_I(y)} = \begin{cases} [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)], & (x^0 > y^0), \\ [\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)], & (x^0 < y^0), \end{cases} \quad (181)$$

と定義される。式 (177) を代入して Wick 縮約を評価すると

$$\begin{aligned} \overline{\phi_I(x)\phi_I(y)} &= \begin{cases} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)}, & (x^0 > y^0) \\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip \cdot (x-y)}, & (x^0 < y^0) \end{cases} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p^0 - E_p + i\epsilon)(p^0 + E_p - i\epsilon)} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &\equiv D_F(x-y), \end{aligned} \quad (182)$$

となる。つまり、2点の Wick 縮約は Feynman 伝播関数となる。特に、自由場の真空 $|0\rangle$ で期待値を取ると

$$\langle 0|T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\}|0\rangle = D_F(x-y), \quad (183)$$

である。

以上の議論を n 点に拡張することは容易であり

$$T\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)\} = N\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n) + \text{all possible Wick contractions}\}, \quad (184)$$

となる。これは Wick の定理と呼ばれる。証明は帰納法を用いればよい。自由場の真空期待値を取ると、残るのは全て Wick 縮約を取った項だけであり、

$$\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)\}|0\rangle = \text{full Wick contractions}, \quad (185)$$

である。

以上により、相関関数を摂動的に計算する準備ができた。例として、2点相関関数の計算を見ておこう。式 (175) より、2点相関関数は Wick の定理によって

$$\begin{aligned} &\langle \Omega|\phi_0(x)\phi_0(y)|\Omega\rangle \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left\{ 1 + \frac{\Sigma(p^2)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \left(\frac{\Sigma(p^2)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right)^2 + \cdots \right\} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - (m_0^2 + \Sigma(p^2)) + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (186)$$

のように計算される。 $-i\Sigma(p^2)$ は 1 粒子既約関の寄与を表す。(Feynman 図のうち、内線を切っても分離しない図を 1 粒子既約関という。) これは自己エネルギーと呼ばれるもので、相互作用によって質量が繰り込まれる効果を表す。物理的な質量 m を $m_0^2 + \Sigma(m^2) = m^2$ として定義し、 $\Sigma(p^2)$ を m^2 のべきで展開すると

$$\begin{aligned}\langle \Omega | \phi_0(x) \phi_0(y) | \Omega \rangle &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(1 - \Sigma'(m^2))(p^2 - m^2) + i\epsilon + \mathcal{O}((p^2 - m^2)^2)} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{iZ_\phi}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} + \text{regular},\end{aligned}\quad (187)$$

となる。ただし、 $Z_\phi \equiv (1 - \Sigma'(m^2))^{-1}$ である。LSZ 簡約公式を導く際には、in 状態と out 状態に対するこのような繰り込みの効果を考慮して計算を進めたのである。

7.3 スカラー場の散乱振幅と Feynman ルール

ここではスカラー場の散乱振幅の計算ルールについて説明する。これは Feynman ルールと呼ばれる。具体例として、スカラー粒子が 2 個入射して 2 個散乱される散乱振幅 \mathcal{M} を計算しよう。これは LSZ 簡約公式により

$$\begin{aligned}i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ &= {}_{\text{out}} \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle_{\text{in}} \\ &= (iZ_\phi^{-1/2})^4 \prod_{i,j=1}^2 \int d^4 x_i e^{-ip_i \cdot x_i} (\square_{x_i} + m^2) \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} (\square_{y_j} + m^2) \\ &\quad \langle \Omega | T \{ \phi_0(y_1) \phi_0(y_2) \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \} | \Omega \rangle,\end{aligned}\quad (188)$$

のように表すことができる。ただし、 $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{k}_j$ である。相関関数は Wick の定理によって摂動的に計算できるが、注意点としては、外線の伝搬関数は繰り込みの影響によって式 (187) のようになる、ということである。外線の伝搬関数を特に

$$D_{\text{F}}^{\text{ex}}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{iZ_\phi}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)},\quad (189)$$

と書くことにする。そして、この伝搬関数は運動方程式 $iZ_\phi^{-1}(\square + m^2)$ によって相殺するのである。

$$iZ_\phi^{-1}(\square_x + m^2) D_{\text{F}}^{\text{ex}}(x-y) = \delta^{(4)}(x-y).\quad (190)$$

なお、相互作用の効果は摂動的に入る。 ϕ^4 理論の相互作用項は

$$-i \int dt H_I = -i \frac{\lambda_0}{4!} \int d^4 z \phi_0^4(z),\quad (191)$$

である。

それでは具体的に計算をしてみよう。摂動展開で、 λ_0 の 2 次の項まで（外線は繰り込み済）を考えると

$$\begin{aligned}
& \langle \Omega | T \{ \phi_0(y_1) \phi_0(y_2) \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \} | \Omega \rangle \\
&= -i\lambda_0 \int d^4 z D_F^{\text{ex}}(y_1 - z) D_F^{\text{ex}}(y_2 - z) D_F^{\text{ex}}(z - x_1) D_F^{\text{ex}}(z - x_2) \\
&\quad + \frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 D_F^{\text{ex}}(y_1 - z_2) D_F^{\text{ex}}(y_2 - z_2) D_F(z_2 - z_1)^2 D_F^{\text{ex}}(z_1 - x_1) D_F^{\text{ex}}(z_1 - x_2) \\
&\quad + \frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 D_F^{\text{ex}}(y_1 - z_2) D_F^{\text{ex}}(y_2 - z_1) D_F(z_2 - z_1)^2 D_F^{\text{ex}}(z_2 - x_1) D_F^{\text{ex}}(z_1 - x_2) \\
&\quad + \frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 D_F^{\text{ex}}(y_1 - z_2) D_F^{\text{ex}}(y_2 - z_1) D_F(z_2 - z_1)^2 D_F^{\text{ex}}(z_1 - x_1) D_F^{\text{ex}}(z_2 - x_2) \\
&\quad + \mathcal{O}(\lambda_0^3),
\end{aligned} \tag{192}$$

となる。これを式 (188) に代入すると

$$\begin{aligned}
& i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\
&= Z_\phi^2 \prod_{i,j=1}^2 \int d^4 x_i e^{-ip_i \cdot x_i} \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} \left\{ -i\lambda_0 \int d^4 z \delta(y_1 - z) \delta(y_2 - z) \delta(z - x_1) \delta(z - x_2) \right. \\
&\quad + \frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \delta(y_1 - z_2) \delta(y_2 - z_2) D_F(z_2 - z_1)^2 \delta(z_1 - x_1) \delta(z_1 - x_2) \\
&\quad + \frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \delta(y_1 - z_2) \delta(y_2 - z_1) D_F(z_2 - z_1)^2 \delta(z_2 - x_1) \delta(z_1 - x_2) \\
&\quad \left. + \frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \delta(y_1 - z_2) \delta(y_2 - z_1) D_F(z_2 - z_1)^2 \delta(z_1 - x_1) \delta(z_2 - x_2) + \mathcal{O}(\lambda_0^3) \right\} \\
&= Z_\phi^2 \left\{ -i\lambda_0 \int d^4 z e^{-i(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \cdot z} - \frac{\lambda_0^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \left(e^{i(k_1 + k_2) \cdot z_2} D_F(z_2 - z_1)^2 e^{-i(p_1 + p_2) \cdot z_1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{-i(p_1 - k_1) \cdot z_2} D_F(z_2 - z_1)^2 e^{-i(p_2 - k_2) \cdot z_1} + e^{-i(p_2 - k_1) \cdot z_2} D_F(z_2 - z_1)^2 e^{-i(p_1 - k_2) \cdot z_1} \right) + \mathcal{O}(\lambda_0^3) \right\} \\
&= Z_\phi^2 \left\{ -i\lambda_0 - \frac{\lambda_0^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_2 - k_2 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 - k_2 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(\lambda_0^3) \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2),
\end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= Z_\phi^2 \left\{ -i\lambda_0 - \frac{\lambda_0^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_2 - k_2 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 - k_2 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(\lambda_0^3) \right\},
\end{aligned} \tag{193}$$

である。この例より、以下の図4のようなFeynmanルールを読み取ることができる。運動量は保存するようにし、ループ運動量については積分をとる。散乱振幅は可能なFeynman図を描いて計算することができるのである。

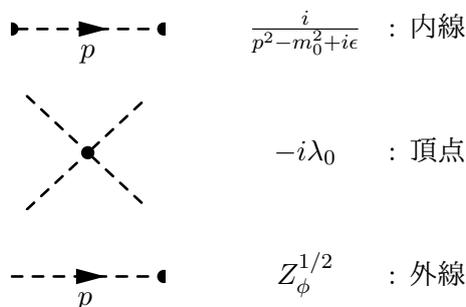


図 4: スカラー ϕ^4 理論の Feynman ルール

7.4 QED における Dirac 場とゲージ場の相関関数

ここでは Lagrangian を

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{0\mu\nu}F_0^{\mu\nu} - i\bar{\psi}_0\gamma^\mu D_\mu\psi_0 - m_0\bar{\psi}_0\psi_0, \quad D_\mu = \partial_\mu - ie_0A_{0\mu}, \quad (194)$$

のように選んで話を進める。Dirac 場の裸の質量を m_0 とし、裸の電荷を e_0 とする。これは量子電磁気学 (QED) と呼ばれる理論である。QED における Dirac 場 $\psi_0(x)$ やゲージ場 $A_0^\mu(y)$ の相関関数を考えよう。

まず、Dirac 場を考える。相互作用描像の場 $\psi_I(x)$ は自由場なので、生成消滅演算子を使って

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= \psi_I^+(x) + \psi_I^-(x), & \bar{\psi}_I(x) &= \bar{\psi}_I^+(x) + \bar{\psi}_I^-(x), & (195) \\ \psi_I^+(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_r a_{\mathbf{p}}^r u^r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, & \psi_I^-(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_r b_{\mathbf{p}}^{r\dagger} v^r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}, \\ \bar{\psi}_I^+(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_r b_{\mathbf{p}}^r \bar{v}^r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, & \bar{\psi}_I^-(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_r a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \bar{u}^r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}, \end{aligned}$$

のように展開できる。ただし、 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_0^2}$ である。計算したいのは時間順序積の相関関数で、例えば2つの場の時間順序積は

$$\mathbf{T}\{\psi_I(x)\bar{\psi}_I(y)\} = \begin{cases} \psi_I^+(x)\bar{\psi}_I^+(y) + \psi_I^-(x)\bar{\psi}_I^+(y) + \psi_I^+(x)\bar{\psi}_I^-(y) + \psi_I^-(x)\bar{\psi}_I^-(y), & (x^0 > y^0), \\ -\bar{\psi}_I^+(y)\psi_I^+(x) - \bar{\psi}_I^-(y)\psi_I^+(x) - \bar{\psi}_I^+(y)\psi_I^-(x) - \bar{\psi}_I^-(y)\psi_I^-(x), & (x^0 < y^0), \end{cases} \quad (196)$$

である。相関関数を求めるには、相互作用描像の場 ψ_I の時間順序積を真空中で挟むのだから、 $\psi_I^+, \overline{\psi_I}^+$ を右、 $\psi_I^-, \overline{\psi_I}^-$ を左になるように並べ替えると便利である。このような順序を正規順序 (normal ordering) と呼ぶ。例えば、2つの場の正規順序積は

$$N\{\psi_I(x)\overline{\psi_I}(y)\} = \psi_I^+(x)\overline{\psi_I}^+(y) - \overline{\psi_I}^-(y)\psi_I^+(x) + \psi_I^-(x)\overline{\psi_I}^+(y) + \psi_I^-(x)\overline{\psi_I}^-(y), \quad (197)$$

のように表す。すると、時間順序積と正規順序積の関係は

$$T\{\psi_I^\alpha(x)\overline{\psi_{I\beta}}(y)\} = N\{\psi_I^\alpha(x)\overline{\psi_{I\beta}}(y)\} + \overline{\psi_I^\alpha(x)\overline{\psi_{I\beta}}(y)}, \quad (198)$$

のようになる。ただし、最後の項は Wick 縮約と呼ばれるもので、

$$\overline{\psi_I^\alpha(x)\overline{\psi_{I\beta}}(y)} = \begin{cases} \{\psi_I^{\alpha+}(x), \overline{\psi_{I\beta}^-}(y)\}, & (x^0 > y^0), \\ -\{\overline{\psi_{I\beta}^+}(y), \psi_I^{\alpha-}(x)\}, & (x^0 < y^0), \end{cases} \quad (199)$$

と定義される。式 (195) を代入して Wick 縮約を評価すると

$$\begin{aligned} \overline{\psi_I^\alpha(x)\overline{\psi_{I\beta}}(y)} &= \begin{cases} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\gamma \cdot p + m_0)^{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-y)}, & (x^0 > y^0) \\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (-\gamma \cdot p + m_0)^{\alpha\beta} e^{ip \cdot (x-y)}, & (x^0 < y^0) \end{cases} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma \cdot p + m_0)^{\alpha\beta}}{(p^0 - E_p + i\epsilon)(p^0 + E_p - i\epsilon)} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma \cdot p + m_0)^{\alpha\beta}}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\gamma \cdot p - m_0 + i\epsilon} \right)_{\beta}^{\alpha} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &\equiv S_F^{\alpha\beta}(x-y), \end{aligned} \quad (200)$$

となる。つまり、2点の Wick 縮約は Feynman 伝播関数となる。特に、自由場の真空 $|0\rangle$ で期待値を取ると

$$\langle 0|T\{\psi_I(x)\overline{\psi_I}(y)\}|0\rangle = S_F(x-y), \quad (201)$$

である。なお、 $T\{\psi_I(x)\psi_I(y)\} = N\{\psi_I(x)\psi_I(y)\}$ および $T\{\overline{\psi_I}(x)\overline{\psi_I}(y)\} = N\{\overline{\psi_I}(x)\overline{\psi_I}(y)\}$ である。

次に、ゲージ場を考えよう。ゲージ固定としては Feynman ゲージを採用する。 $A_I^\mu(x)$ は自由場なので、生成消滅演算子を使って

$$\begin{aligned} A_I^\mu(x) &= A_I^{\mu+}(x) + A_I^{\mu-}(x), \quad (202) \\ A_I^{\mu+}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^r \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \quad A_I^{\mu-}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^{r\dagger} \epsilon_r^{\mu*}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}, \end{aligned}$$

のように展開できる。ただし、 $E_p = |\mathbf{p}|$ である。計算したいのは時間順序積の相関関数で、例えば2つの場の時間順序積は

$$T\{A_I^\mu(x)A_I^\nu(y)\} = \begin{cases} A_I^{\mu+}(x)A_I^{\nu+}(y) + A_I^{\mu-}(x)A_I^{\nu+}(y) + A_I^{\mu+}(x)A_I^{\nu-}(y) + A_I^{\mu-}(x)A_I^{\nu-}(y), & (x^0 > y^0), \\ A_I^{\nu+}(y)A_I^{\mu+}(x) + A_I^{\nu-}(y)A_I^{\mu+}(x) + A_I^{\nu+}(y)A_I^{\mu-}(x) + A_I^{\nu-}(y)A_I^{\mu-}(x), & (x^0 < y^0), \end{cases} \quad (203)$$

である。相関関数を求めるには、相互作用描像の場 A_I^μ の時間順序積を真空で挟むのだから、 $A_I^{\mu+}$ を右、 $A_I^{\mu-}$ を左になるように並べ替えると便利である。このような順序を正規順序 (normal ordering) と呼ぶ。例えば、2つの場の正規順序積は

$$N\{A_I^\mu(x)A_I^\nu(y)\} = A_I^{\mu+}(x)A_I^{\nu+}(y) + A_I^{\nu-}(y)A_I^{\mu+}(x) + A_I^{\mu-}(x)A_I^{\nu+}(y) + A_I^{\mu-}(x)A_I^{\nu-}(y), \quad (204)$$

のように表す。すると、時間順序積と正規順序積の関係は

$$T\{A_I^\mu(x)A_I^\nu(y)\} = N\{A_I^\mu(x)A_I^\nu(y)\} + \overline{A_I^\mu(x)A_I^\nu(y)}, \quad (205)$$

のようになる。ただし、最後の項は Wick 縮約と呼ばれるもので、

$$\overline{A_I^\mu(x)A_I^\nu(y)} = \begin{cases} [A_I^{\mu+}(x), A_I^{\nu-}(y)], & (x^0 > y^0), \\ [A_I^{\nu+}(y), A_I^{\mu-}(x)], & (x^0 < y^0), \end{cases} \quad (206)$$

と定義される。式 (202) を代入して Wick 縮約を評価すると

$$\begin{aligned} \overline{A_I^\mu(x)A_I^\nu(y)} &= \begin{cases} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-\eta^{\mu\nu}}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)}, & (x^0 > y^0) \\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-\eta^{\mu\nu}}{2E_p} e^{ip \cdot (x-y)}, & (x^0 < y^0) \end{cases} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{(p^0 - E_p + i\epsilon)(p^0 + E_p - i\epsilon)} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &\equiv P_F^{\mu\nu}(x-y), \end{aligned} \quad (207)$$

となる。つまり、2点の Wick 縮約は Feynman 伝播関数となる。特に、自由場の真空 $|0\rangle$ で期待値を取ると

$$\langle 0|T\{A_I^\mu(x)A_I^\nu(y)\}|0\rangle = P_F^{\mu\nu}(x-y), \quad (208)$$

である。

以上の議論を Dirac 場とゲージ場を含めた n 点の場合に拡張することは容易であり

$$T\{\psi_I(x_1)\cdots A_I^\mu(x_n)\} = N\{\psi_I(x_1)\cdots A_I^\mu(x_n) + \text{all possible Wick contractions}\}, \quad (209)$$

となる。これは Wick の定理と呼ばれる。証明は帰納法を用いればよい。自由場の真空期待値を取ると、残るのは全て Wick 縮約を取った項だけであり、

$$\langle 0|T\{\psi_I(x_1)\cdots A_I^\mu(x_n)\}|0\rangle = \text{full Wick contractions}, \quad (210)$$

である。

以上により、相関関数を摂動的に計算する準備ができた。例として、2点相関関数の計算を見ておこう。Dirac 場の2点相関関数は Wick の定理によって

$$\begin{aligned} &\langle \Omega|\psi_0(x)\overline{\psi_0}(y)|\Omega\rangle \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma \cdot p - m_0} \left\{ 1 + \frac{\Sigma(\gamma \cdot p)}{\gamma \cdot p - m_0} + \left(\frac{\Sigma(\gamma \cdot p)}{\gamma \cdot p - m_0} \right)^2 + \cdots \right\} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma \cdot p - m_0 - \Sigma(\gamma \cdot p)} e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (211)$$

のように計算される。 $-i\Sigma(\gamma \cdot p)$ は自己エネルギーと呼ばれるもので、相互作用によって質量が繰り込まれる効果を表す。物理的な質量 m を $m_0 + \Sigma(m) = m$ として定義し、 $\Sigma(\gamma \cdot p)$ を $\gamma \cdot p - m$ のべきで展開すると

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \psi_0(x) \bar{\psi}_0(y) | \Omega \rangle &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(1 - \Sigma'(m))(\gamma \cdot p - m) + \mathcal{O}((\gamma \cdot p - m)^2)} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{iZ_\psi}{\gamma \cdot p - m} e^{-ip \cdot (x-y)} + \text{regular}, \end{aligned} \quad (212)$$

となる。ただし、 $Z_\psi \equiv (1 - \Sigma'(m))^{-1}$ である。LSZ 簡約公式を導く際には、in 状態と out 状態に対するこのような繰り込みの効果を考えて計算を進めたのである。

ゲージ場の 2 点相関関数も Wick の定理によって

$$\begin{aligned} \langle \Omega | A_0^\mu(x) A_0^\nu(y) | \Omega \rangle &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2} \{ \eta^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu} (\Pi(p^2) + \Pi(p^2)^2 + \dots) \} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{-i p^\mu p^\nu}{p^2} + \frac{-i}{p^2(1 - \Pi(p^2))} \Delta^{\mu\nu} \right\} e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (213)$$

のように計算される。ただし、1 粒子既約関の寄与を $i\Pi^{\mu\nu}(p) = i(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\Pi(p^2) = ip^2\Delta^{\mu\nu}\Pi(p^2)$ とおき、 $\Delta^\mu_\rho \Delta^\rho_\nu = \Delta^\mu_\nu$ を使った。このうち括弧内の $p^\mu p^\nu$ を含む項は Ward-高橋恒等式により、散乱振幅には寄与しないことが示される。 $(p^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu} = 0.)$ そこで 2 項目にのみ着目して $\Delta^{\mu\nu} \sim \eta^{\mu\nu}$ すると、

$$\langle \Omega | A_0^\mu(x) A_0^\nu(y) | \Omega \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta^{\mu\nu} Z_A}{p^2} e^{-ip \cdot (x-y)} + \text{regular}, \quad (214)$$

である。光子の質量は 0 であり、波動関数の繰り込みは $Z_A = (1 - \Pi(0))^{-1}$ となることがわかる。

7.5 QED の散乱振幅と Feynman ルール

ここでは QED の散乱振幅の計算ルールについて説明する。これは Feynman ルールと呼ばれる。具体例として、電子と陽電子が入射して 2 個の光子に散乱される散乱振幅 \mathcal{M} を計算しよう。これは LSZ 簡約公式により

$$\begin{aligned} &i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ &= \text{out} \langle \mathbf{k}_1^{s_1} \mathbf{k}_2^{s_2} | \mathbf{p}_1^{r_1} \mathbf{p}_2^{r_2} \rangle_{\text{in}} \\ &= -(iZ_\psi^{-1/2})^2 (iZ_A^{-1/2})^2 \prod_{i=1}^2 \int d^4 x_i e^{-ip_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^2 \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} \epsilon_{\nu_j}^{s_j^*}(\mathbf{k}_j) \square_{y_j} \\ &\quad \bar{v}^{r_2}(\mathbf{p}_2) (-i\gamma \cdot \partial^{x_2} + m) \langle \Omega | T \{ A_0^{\nu_1}(y_1) A_0^{\nu_2}(y_2) \psi_0(x_2) \bar{\psi}_0(x_1) \} | \Omega \rangle (i\gamma \cdot \overleftarrow{\partial}^{x_1} + m) u^{r_1}(\mathbf{p}_1), \end{aligned} \quad (215)$$

のように表すことができる。ただし、 $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{k}_j$ である。相関関数は Wick の定理によって摂動的に計算できるが、注意点としては、外線の伝搬関数は繰り込みの影響によって式

(212)、(214) のようになる、ということである。外線の伝搬関数を特に

$$\begin{aligned} S_{\text{F}}^{\text{ex}}(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{iZ_\psi}{\gamma \cdot p - m} e^{-ip \cdot (x-y)}, \\ P_{\text{F}}^{\text{ex} \mu\nu}(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta^{\mu\nu} Z_A}{p^2} e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (216)$$

と書くことにする。そして、この伝搬関数は運動方程式によって

$$\begin{aligned} iZ_\psi^{-1}(-i\gamma \cdot \partial^x + m)S_{\text{F}}^{\text{ex}}(x-y) &= \delta^{(4)}(x-y), \\ iZ_\psi^{-1}S_{\text{F}}^{\text{ex}}(x-y)(i\gamma \cdot \overleftarrow{\partial}^y + m) &= \delta^{(4)}(x-y), \\ iZ_A^{-1}\square_x P_{\text{F}}^{\text{ex} \mu\nu}(x-y) &= -\eta^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-y), \end{aligned} \quad (217)$$

のように相殺する。なお、相互作用の効果は摂動的に入る。QED の相互作用項は

$$-i \int dt H_I = -ie_0 \int d^4 z A_0^\mu \bar{\psi}_0 \gamma_\mu \psi_0, \quad (218)$$

である。

それでは具体的に計算を試みよう。式 (175) をもとに、摂動展開で e_0 の 2 次の項まで (外線は繰り込み済) を考えると

$$\begin{aligned} &\langle \Omega | T \{ A_0^{\nu_1}(y_1) A_0^{\nu_2}(y_2) \psi_0(x_2) \bar{\psi}_0(x_1) \} | \Omega \rangle \\ &= \frac{2(-ie_0)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 S_{\text{F}}^{\text{ex}}(x_2 - z_2) \gamma_\sigma S_{\text{F}}(z_2 - z_1) \gamma_\rho S_{\text{F}}^{\text{ex}}(z_1 - x_1) P_{\text{F}}^{\text{ex} \nu_1 \rho}(y_1 - z_1) P_{\text{F}}^{\text{ex} \nu_2 \sigma}(y_2 - z_2) \\ &\quad + \frac{2(-ie_0)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 S_{\text{F}}^{\text{ex}}(x_2 - z_2) \gamma_\sigma S_{\text{F}}(z_2 - z_1) \gamma_\rho S_{\text{F}}^{\text{ex}}(z_1 - x_1) P_{\text{F}}^{\text{ex} \nu_1 \sigma}(y_1 - z_2) P_{\text{F}}^{\text{ex} \nu_2 \rho}(y_2 - z_1) \\ &\quad + \mathcal{O}(e_0^4), \end{aligned} \quad (219)$$

となる。これを散乱振幅の LSZ 簡約公式 (215) に代入すると

$$\begin{aligned} &i\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ &= -(-ie_0)^2 (Z_\psi^{1/2})^2 (Z_A^{1/2})^2 \prod_{i=1}^2 \int d^4 x_i e^{-ip_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^2 \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} \epsilon_{\nu_j}^{s_j^*}(\mathbf{k}_j) \int d^4 z_1 d^4 z_2 \\ &\quad \left\{ \delta(x_2 - z_2) \overline{v^{r_2}}(\mathbf{p}_2) \gamma_\sigma S_{\text{F}}(z_2 - z_1) \gamma_\rho u^{r_1}(\mathbf{p}_1) \delta(z_1 - x_1) \eta^{\nu_1 \rho} \delta(y_1 - z_1) \eta^{\nu_2 \sigma} \delta(y_2 - z_2) \right. \\ &\quad \left. + \delta(x_2 - z_2) \overline{v^{r_2}}(\mathbf{p}_2) \gamma_\sigma S_{\text{F}}(z_2 - z_1) \gamma_\rho u^{r_1}(\mathbf{p}_1) \delta(z_1 - x_1) \eta^{\nu_1 \sigma} \delta(y_1 - z_2) \eta^{\nu_2 \rho} \delta(y_2 - z_1) \right\} + \mathcal{O}(e_0^4) \\ &= -(-ie_0)^2 Z_\psi Z_A \prod_{j=1}^2 \epsilon_{\nu_j}^{s_j^*}(\mathbf{k}_j) \int d^4 z_1 d^4 z_2 \left\{ e^{-i(p_2 - k_2) \cdot z_2} \overline{v^{r_2}}(\mathbf{p}_2) \gamma^{\nu_2} S_{\text{F}}(z_2 - z_1) \gamma^{\nu_1} u^{r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-i(p_1 - k_1) \cdot z_1} \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(p_2 - k_1) \cdot z_2} \overline{v^{r_2}}(\mathbf{p}_2) \gamma^{\nu_1} S_{\text{F}}(z_2 - z_1) \gamma^{\nu_2} u^{r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-i(p_1 - k_2) \cdot z_1} \right\} + \mathcal{O}(e_0^4) \\ &= -Z_\psi Z_A \left\{ (-ie_0)^2 \prod_{j=1}^2 \epsilon_{\nu_j}^{s_j^*}(\mathbf{k}_j) \overline{v^{r_2}}(\mathbf{p}_2) \gamma^{\nu_2} \frac{i}{\gamma \cdot (p_1 - k_1) - m_0} \gamma^{\nu_1} u^{r_1}(\mathbf{p}_1) \right. \\ &\quad \left. + (-ie_0)^2 \prod_{j=1}^2 \epsilon_{\nu_j}^{s_j^*}(\mathbf{k}_j) \overline{v^{r_2}}(\mathbf{p}_2) \gamma^{\nu_1} \frac{i}{\gamma \cdot (p_1 - k_2) - m_0} \gamma^{\nu_2} u^{r_1}(\mathbf{p}_1) + \mathcal{O}(e_0^4) \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2), \end{aligned}$$

のようになる。すなわち、電子と陽電子が対消滅して光子2個になる散乱振幅は

$$i\mathcal{M} = -Z_\psi Z_A \left\{ (-ie_0)^2 \prod_{j=1}^2 \epsilon_{\nu_j}^{s_j^*}(\mathbf{k}_j) \overline{v}^{r_2}(\mathbf{p}_2) \gamma^{\nu_2} \frac{i}{\gamma \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) - m_0} \gamma^{\nu_1} u^{r_1}(\mathbf{p}_1) \right. \\ \left. + (-ie_0)^2 \prod_{j=1}^2 \epsilon_{\nu_j}^{s_j^*}(\mathbf{k}_j) \overline{v}^{r_2}(\mathbf{p}_2) \gamma^{\nu_1} \frac{i}{\gamma \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2) - m_0} \gamma^{\nu_2} u^{r_1}(\mathbf{p}_1) + \mathcal{O}(e_0^4) \right\},$$

である。この例より、以下の図5のようなFeynmanルールを読み取ることができる。運動量は保存するようにし、ループ運動量については積分をとる。散乱振幅は可能なFeynman図を描いて計算することができるのである。

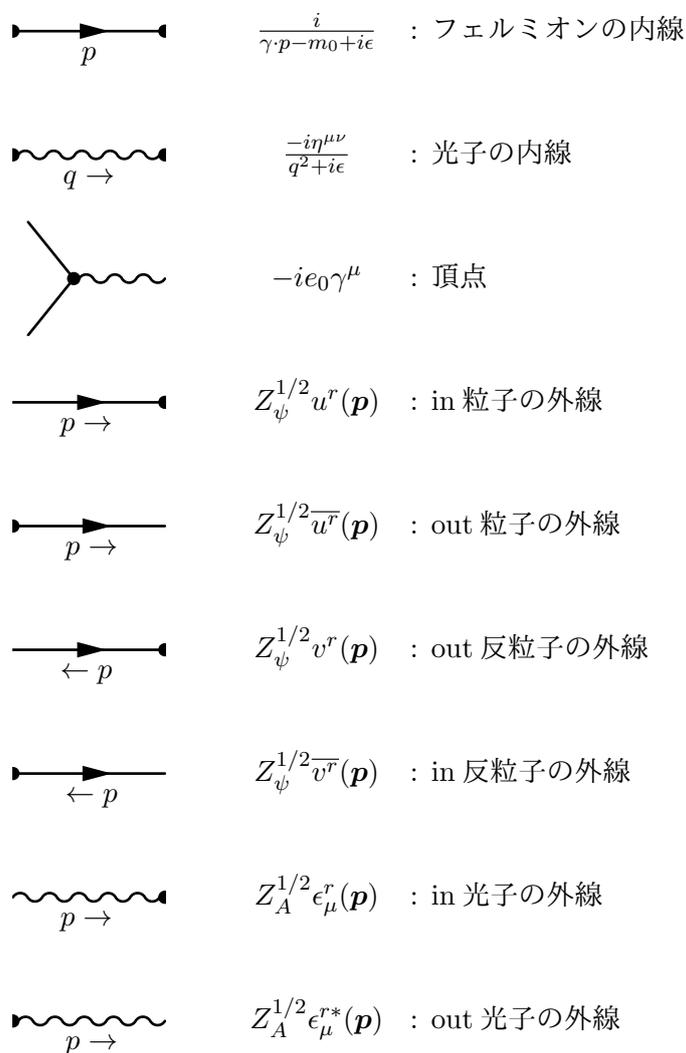


図 5: QED の Feynman ルール

8 自発的対称性の破れと Higgs 機構

8.1 南部-Goldstone boson

一般に場の理論において、連続的パラメータを持つ global 対称性が自発的に破れた場合には、質量 0 の boson が現れる。これを南部-Goldstone の定理と呼ぶ。

例として、複素スカラー場 φ の Goldstone 模型を考えよう。

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|), \quad V(|\varphi|) = -\mu^2 \varphi^* \varphi + \lambda (\varphi^* \varphi)^2. \quad (220)$$

この模型の特徴は 2 つある。1 つは質量項 $-\mu^2 \varphi^* \varphi$ の符号が負であることで、もう 1 つは φ の位相を回す global U(1) 変換

$$\varphi' = e^{i\theta} \varphi, \quad (221)$$

で不変であるということである。 θ は定数パラメータである。図 6 から明らかなように、 $V(|\varphi|)$ は $\varphi = 0$ と $\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} e^{i\theta_0}$ で極値をとる。 θ_0 は任意なので以下では $\theta_0 = 0$ としよう。 $\varphi = 0$ の真空は不安定だが U(1) 対称性で不変であり ($\varphi' = e^{i\theta} 0 = \varphi$)、 $\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}}$ の真空は安定だが U(1) 対称性は残っていない ($\varphi' = e^{i\theta} \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} \neq \varphi$)。系はエネルギーが高い状態から低い状態へ遷移するはずだから、最初に対称性の高い $\varphi = 0$ の真空にあったとしても、やがてエネルギーの低い $\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}}$ に移って U(1) 対称性は破れる。この現象を自発的対称性の破れと呼ぶ。 φ を自発的対称性の破れが起こった後の真空まわりで

$$\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (222)$$

のように展開すると、Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 + \frac{\mu^2}{2} \left(\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \phi_1 \right)^2 + \phi_2^2 \right) - \frac{\lambda}{4} \left(\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \phi_1 \right)^2 + \phi_2^2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 + \frac{\mu^4}{4\lambda} - \mu^2 \phi_1^2 - \mu\sqrt{\lambda} \phi_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \end{aligned} \quad (223)$$

となる。これより、 ϕ_2 の質量は 0 であることがわかる。 ϕ_2 を南部-Goldstone boson (NG boson) と呼ぶ。

それでは南部-Goldstone 定理の証明をしよう。場を ϕ^i ($i = 1, \dots, n$) とし、ポテンシャルは $V(\phi^i)$ で与えられるとする。そして、ポテンシャルには global 対称性

$$V(\phi^i + \epsilon_A \Delta(\phi)^{iA}) = V(\phi^i), \quad (A = 1, \dots, N) \quad (224)$$

があるとする。 ϵ_A は global 対称性の連続パラメータである。さらに、ポテンシャルは $\phi^i = 0$ のとき不安定な真空であるとし、 $\phi^i = \phi_0^i$ のときに安定な真空であるとする。自発的対称性の破れが起こった後では

$$(\Delta(\phi_0)^{1A'}, \dots, \Delta(\phi_0)^{nA'}) \neq (0, \dots, 0) \quad (A' = 1, \dots, r) \quad (225)$$

となって、対称性は r 個だけ破れるとする。

図 6: wine bottle ポテンシャル

ここで $V(\phi)$ を ϕ_0^i のまわりで 2 次の項まで展開すると

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j V|_{\phi_0} (\phi^i - \phi_0^i)(\phi^j - \phi_0^j), \quad (226)$$

となる。ただし $\partial_i V|_{\phi_0} = 0$ を使った。 $M_{ij} = \partial_i \partial_j V|_{\phi_0}$ とすると、これは質量行列を与える。次にポテンシャルの対称性 (224) から

$$\partial_j V \Delta(\phi)^{jA} = 0, \quad (227)$$

であり、これをさらに微分して $\phi^i = \phi_0^i$ とすると

$$M_{ij} \Delta(\phi_0)^{jA} = 0, \quad (228)$$

であるが、式 (225) より非自明な固有ベクトルは r 個である。従って、自発的対称性の破れが起きた後では、対称性が自発的に破れた分だけ南部-Goldstone boson が現れることになる。

8.2 カイラルフェルミオンと自発的対称性の破れ

Dirac 場は 4 成分のスピンル場であるが、helicity を導入したときに考察したように、massless の場合には左手巻きと右手巻きが分離する。このことをより詳しく見てみよう。

まず、左手巻き ψ_L と右手巻き ψ_R は Dirac 場 ψ を以下のように射影して得られる。

$$\psi_L = \frac{\mathbf{1}_4 - \gamma_5}{2} \psi, \quad \psi_R = \frac{\mathbf{1}_4 + \gamma_5}{2} \psi. \quad (229)$$

ただし、 γ_5 は

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma_5)^2 = \mathbf{1}_4, \quad (230)$$

を満たす 4×4 行列である。質量をもつ Dirac 場の Lagrangian を ψ_L と ψ_R で書き直すと

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L), \end{aligned} \quad (231)$$

のようになる。これより、 $m = 0$ の場合には Lagrangian において ψ_L の項と ψ_R の項は分離し、それぞれ独立な global U(1) 変換

$$\psi'_L = e^{i\theta_L}\psi_L, \quad \psi'_R = e^{i\theta_R}\psi_R, \quad (232)$$

のもとで不変であることがわかる。このように左手巻きと右手巻きでそれぞれ異なる対称性を持つ理論のことをカイラルな理論と呼ぶ。また、左手巻きか右手巻きのフェルミオンのことをカイラルフェルミオンと呼ぶ。上記の U(1) 変換を Dirac 場の変換として表すと

$$\begin{aligned} \psi' &= e^{i\theta_V}\psi \quad (\theta_V = \theta_L = \theta_R), \\ \psi' &= e^{i\theta_A\gamma^5}\psi \quad (\theta_A = -\theta_L = \theta_R), \end{aligned} \quad (233)$$

である。特に後者の変換は Dirac 場が massless の場合のみに存在する対称性で、カイラル変換と呼ばれる。

1961 年、南部は弟子の Jona-Lasinio とともに、強い相互作用のモデルを提案した。(南部 Jona-Lasinio モデル) このモデルはカイラルフェルミオンが相互作用するモデルでカイラル対称性をもつ。このモデルに自発的対称性の破れが起きると、フェルミオンと反フェルミオンの束縛状態として massless 粒子が現れる。南部らはこれを π 中間子と同定したのである。実際の強い相互作用の理論ではカイラル対称性はクォークが質量をもつので近似的にのみ成立すると考えられる。これによって π 中間子も実際には massless ではなく、140 GeV 程度の質量をもつと考えられる。ちなみに Gell-Mann と Zweig がクォークモデルを提唱するのは 1964 年頃のことである。

8.3 Higgs 機構

対称性が global な場合には、南部-Goldstone boson が現れた。では、対称性が local な場合にはどうなるだろうか？自然界にはゲージ対称性があるので、このような疑問を抱くのは当然である。

ここでは簡単のため Abelian-Higgs モデルを考えよう。Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - V(|\varphi|), \quad V(|\varphi|) = -\mu^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2, \quad (234)$$

で与えられる。共変微分は $D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + ieA_\mu\varphi$ で定義されており、ゲージ変換は

$$\varphi'(x) = e^{i\theta(x)}\varphi(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta, \quad (235)$$

となる。ポテンシャルは前節と同じなので、最初に対称性の高い $\varphi = 0$ の真空にあったとしても、やがてエネルギーの低い $\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}}$ に移って local U(1) 対称性は破れる。

ここで場を安定な真空のまわりで展開して Lagrangian に代入しよう。スカラー場とゲージ場を

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \rho(x)\right)e^{-i\theta(x)}, \quad A_\mu(x), \quad (236)$$

のように展開すると、ゲージ変換 (235) を利用して必ず

$$\varphi'(x) = \frac{v + \rho(x)}{\sqrt{2}}, \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta, \quad (237)$$

の形にもっていくことができる。ただし、 $v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ とおいた。これを Lagrangian に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho - ieA'_\mu(v + \rho))(\partial^\mu\rho + ieA'^\mu(v + \rho)) \\ &\quad + \frac{\mu^2}{2}(v + \rho)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \rho)^4 \\ &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \frac{e^2}{2}A'_\mu A'^\mu(v + \rho)^2 \\ &\quad + \frac{\mu^4}{4\lambda} - \mu^2\rho^2 - \lambda v\rho^3 - \frac{\lambda}{4}\rho^4, \end{aligned} \quad (238)$$

となる。これより、NG boson は現れないがその代わりにゲージ場が質量 $m_A = ev$ を獲得し、スカラー場が質量 $m_\rho = \sqrt{2}\mu$ をもつことが分かる。すなわち、ゲージ理論においては自発的対称性の破れによって、ゲージ場が質量を獲得する。自由度としては、対称性が破れる前はスカラーが2個、ゲージ場が横波2個の自由度を持っていたが、破れた後ではスカラーが1個、ゲージ場が横波2個と縦波1個の自由度になっている。これより、スカラーの自由度がゲージ場に吸収された (喰われた) と解釈することができる。

8.4 カイラルなゲージ理論における Higgs 機構

Abelian-Higgs 模型にカイラルフェルミオンを加えた模型を考えよう。これは素粒子の標準模型を単純化した模型と考えることができ、以下に表すようにゲージ場の運動項、カイラルフェルミオンの運動項、スカラー場の運動項とポテンシャル項、および湯川相互作用項、の4つの部分からなる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R \\ &\quad + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - V(|\varphi|) - y(\varphi\bar{\psi}_L\psi_R + \varphi^*\bar{\psi}_R\psi_L). \end{aligned} \quad (239)$$

ポテンシャルは以前と同じで $V(|\varphi|) = -\mu^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2$ とし、共変微分は

$$\begin{aligned} D_\mu\psi_L &= \partial_\mu\psi_L + iY_L e A_\mu\psi_L, \\ D_\mu\psi_R &= \partial_\mu\psi_R + iY_R e A_\mu\psi_R, \\ D_\mu\varphi &= \partial_\mu\varphi + iY_\varphi e A_\mu\varphi, \end{aligned} \quad (240)$$

である。 Y_φ, Y_L, Y_R は e を単位とした電荷の値を与える。ゲージ変換は

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= e^{iY_\varphi\theta(x)}\varphi(x), & A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta, \\ \psi'_L(x) &= e^{iY_L\theta(x)}\psi_L(x), & \psi'_R(x) &= e^{iY_R\theta(x)}\psi_R(x), \end{aligned} \quad (241)$$

で与えられるが、Lagrangian (239) がこの変換で不変であるためには $Y_\varphi - Y_L + Y_R = 0$ となる必要がある。なお、カイラルフェルミオンは1種類しか入れてないので、カイラル対称性はない。

この模型でも Abelian-Higgs 模型と同じように自発的対称性の破れが起きて、ゲージ場は質量を獲得する。この部分は以前述べたことである。今回は新たにカイラルフェルミオンが入っており、湯川相互作用項でスカラーと結合している。容易にわかるように、この項の φ が期待値をもつことで

$$m_\psi = \frac{yv}{\sqrt{2}}, \quad (242)$$

なる質量項が現れる。つまり、U(1) ゲージ対称性が破れる前はゲージ場もフェルミオンも massless だったのだが、対称性が破れたあとは全ての場が質量を獲得することになる。本質的にはこれと同じことが標準模型でも起きており、Higgs 機構によってクォークとレプトンは質量を獲得し、弱い相互作用を媒介するゲージ粒子 W^\pm および Z の質量は 80 GeV および 91 GeV であることが観測されている。(電弱統一理論=Glashow-Weinberg-Salam 模型)

A 単位系について

4次元時空は $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$ のように表す。特に $x^0 = ct$ なので、 $\partial_0 = \frac{1}{c}\partial_t$, $A_0 = \frac{1}{c}A_t$ である。また、計量は $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ のようにとる。

次元についてまとめておく。 S/\hbar は無次元であることに注意するとよい。

$$\begin{aligned} [\hbar] &= \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, & [c] &= \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, & [\psi] &= \text{m}^{-3/2}, \\ [E_i] &= \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{C}^{-1}, & [A_t] &= \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{C}^{-1}, \\ [B_i] &= \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}, & [A_i] &= \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (243)$$

B 古典力学と対称性

B.1 Euler-Lagrange 形式

素粒子物理学の基本法則は場の量子論を基に記述されるが、それは Euler-Lagrange 形式によって表される。従ってここではまず古典力学を Euler-Lagrange 形式で復習することから始めよう。

具体的な系として、ポテンシャル中を運動する質量 m の粒子を考えよう。時刻 t における粒子の位置を $x^i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) とし、ポテンシャルを $V(x^i)$ とする。このとき運動方程式は

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}, \quad (244)$$

で与えられる。この式の両辺に δx^i をかけて i について和をとると、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} 0 &= -m \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x^i - \frac{\partial V}{\partial x^i} \delta x^i \\ &= -m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \delta x^i \right) + m \frac{dx_i}{dt} \frac{d(\delta x^i)}{dt} - \delta V \\ &= -m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \delta x^i \right) + \delta \left(\frac{m}{2} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx^i}{dt} - V \right). \end{aligned} \quad (245)$$

ただし、上式では $\sum_{i=1}^3$ は省略した。この式を時刻 $t = -\infty$ から $t = \infty$ の区間で積分して、かつ微小変化分を $\delta x^i(-\infty) = \delta x^i(\infty) = 0$ と制限すると

$$0 = \delta \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{m}{2} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx^i}{dt} - V \right), \quad (246)$$

のような式を得る。すなわち作用 S

$$S[x^i] = \int_{-\infty}^{\infty} dt L(x^i(t), \dot{x}^i(t)), \quad (247)$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}^i - V(x^i), \quad (248)$$

に変分原理を適用すれば、運動方程式 (244) が求まる。 L は Lagrangian と呼ばれるスカラー量である。素粒子物理では、ミクロの世界において上記の x^i および $S[x^i]$ に対応するものを求めることが出発点となる。

B.2 対称性

次に、Lagrangian (248) がもつ対称性について考えよう。Lagrangian (248) が対称性をもつとは、 x^i についてある変換を施しても Lagrangian の変化分が高々全微分項であることをいう。あるいは作用 (247) が不変であるといってもよい。

まず確認できるのは時間並進の対称性で、以下のような変換で与えられる。

$$t' = t - a, \quad x^{i'}(t') = x^i(t). \quad (249)$$

実際にこの変換の下で作用が不変であることは

$$\begin{aligned} S[x^{i'}] &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{m}{2} \frac{dx^{i'}(t)}{dt} \frac{dx^{i'}(t)}{dt} - V(x^{i'}(t)) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left(\frac{m}{2} \frac{dx^{i'}(t')}{dt'} \frac{dx^{i'}(t')}{dt'} - V(x^{i'}(t')) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left(\frac{m}{2} \frac{dx^i(t)}{dt'} \frac{dx^i(t)}{dt'} - V(x^i(t)) \right) \\ &= S[x^i], \end{aligned} \quad (250)$$

のように確かめることができる。1 行目から 2 行目へは積分変数を t' としただけで、2 行目から 3 行目へ変形する際に時間並進の変換を用いた。3 行目から 4 行目へ移る際には $dt' = dt$ および $\frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}$ を用いた。時間並進による Lagrangian の変化分が時間の全微分となることも

$$\begin{aligned} \delta_S x^i(t) &= x^{i'}(t) - x^i(t) = a \dot{x}^i(t), \\ \delta_S L &= \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i = a \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{d\dot{x}^i}{dt} \right) = a \frac{dL}{dt}, \end{aligned} \quad (251)$$

のように確かめることができる。

次に、Lagrangian (248) のポテンシャルは、 $V(|x|)$ のように x^i の大きさにのみ依存するとする。このとき Lagrangian が空間回転

$$x^{i'} = R^i_j x^j, \quad (R^T)^i_k R^k_j = \delta^i_j, \quad (252)$$

のもとで不変であることをみよう。 R は 3×3 行列で、回転行列と呼ばれる。ここで R が微小な回転を表すとして

$$R^i_j \sim \delta^i_j - \omega^i_j, \quad (253)$$

のように近似してみよう。すると

$$(R^T)^i_k R^k_j = \delta^i_j \Leftrightarrow (\omega^T)^i_j + \omega^i_j = 0, \quad (254)$$

となることが分かる。すなわち ω は 3×3 反対称行列である。このとき微小空間回転による Lagrangian の変化分は

$$\begin{aligned} \delta_S x^i &= -\omega^i_j x^j, \\ \delta_S L &= \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i = -\frac{\partial L}{\partial x^i} \omega^i_j x^j - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \omega^i_j \dot{x}^j = 0, \end{aligned} \quad (255)$$

となる。ただし

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \sim x^i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \sim \dot{x}^i, \quad (256)$$

となることを使った。

問 2 Lagrangian (248) が x^i に依存しないとする。このとき空間並進の変換

$$\delta_S x^i = a^i, \quad (257)$$

の下で、Lagrangian の変化分は 0 であることを示せ。

B.3 対称性と保存則 — Noether の定理

Lagrangian に global 対称性がある場合には、保存量を構成することができる。これを Noether の定理と呼ぶ。Noether の定理による保存量の構成には運動方程式を用いる。まず、Lagrangian の変分を計算すると

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \\ &= \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \delta x^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i \right), \end{aligned} \quad (258)$$

である。2 行目から 3 行目に移るときに運動方程式を用いた。次に、考えている系には対称性があって、作用が変換 $\delta_S x^i$ のもとで不変であるとしよう。すると Lagrangian の変化分は時間についての全微分項で表される。

$$\delta_S L = \frac{d}{dt} G(\delta_S x^i). \quad (259)$$

ここで式 (258) において $\delta x^i = \delta_S x^i$ とおいて、式 (259) との差分をとると

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad Q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta_S x^i - G(\delta_S x^i), \quad (260)$$

を得る。これは Q が保存する (時間に依存しない) ことを表す。

以下では時間並進対称性と空間回転対称性について、具体的に保存量を構成しよう。まず時間並進対称性の場合には式 (251) より

$$\delta_S x^i = a \dot{x}^i, \quad G(\delta_S x^i) = aL, \quad (261)$$

なので、 $Q = aE$ とすると

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - L \\ &= \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}^i + V(x^i), \end{aligned} \quad (262)$$

なる保存量を得る。1行目はハミルトニアン定義に他ならない。つまりこれはエネルギー保存を表す。このように、時間並進対称性とエネルギー保存則は関係しているのである。

次に回転対称性の場合には式 (255) より

$$\delta_S x^i = -\omega^i_j x^j, \quad G(\delta_S x^i) = 0, \quad (263)$$

なので、 $Q = \frac{1}{2}\omega_{ij}J^{ij}$ とすると

$$\begin{aligned} J^{ij} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} x^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} x^i \\ &= m(x^i \dot{x}^j - x^j \dot{x}^i), \end{aligned} \quad (264)$$

なる保存量を得る。これは角運動量保存に他ならない。このように、空間回転対称性と角運動量保存則は関係しているのである。

問 3 Lagrangian (248) が x^i に依存しないとす。このとき空間並進対称性に対する保存量を求めよ。

C 3次元空間回転とベクトルの記法

C.1 ベクトル

3次元空間の座標を (x^1, x^2, x^3) のように表し、この座標を適当に回転させて得られる新たな座標を (x'^1, x'^2, x'^3) とする。回転は 3×3 行列で表されるので、その行列を R と書くと、座標変換の式は

$$x'^i = R^i_j x^j = R^i_1 x^1 + R^i_2 x^2 + R^i_3 x^3, \quad (265)$$

のように表される。この式で i, j は $1, 2, 3$ の値を取り、 j については和記号を省略している。以後 j のように、上付き添え字と下付き添え字で2度現れる添え字については、特に断らない限り和を取るものとする。例えば (x^1, x^2, x^3) の内積は、クロネッカーのデルタを用いて

$$\delta_{ij} x^i x^j = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad (266)$$

のように表される。さらに $x_i \equiv \delta_{ij} x^j$ と定義すると、内積は

$$\delta_{ij} x^i x^j = x^i x_i, \quad (267)$$

のように記述することもできる。また $x^i = \delta^{ij} x_j$ と書くことができる。以後、添え字の上げ下げはクロネッカーのデルタ δ^{ij} , δ_{ij} を用いて行う。

内積は空間回転の下で不変なので、

$$\delta_{ij} x'^i x'^j = (\delta_{ij} R^i_k R^j_l) x^k x^l = \delta_{kl} x^k x^l, \quad (268)$$

となり、これを満たすためには R が

$$R_{jk}R^j{}_l = \delta_{kl} \quad (R^T R = \mathbf{1}), \quad R^j{}_l R^{il} = \delta^{ij} \quad (RR^T = \mathbf{1}), \quad (269)$$

を満たせばよい。なお、これより $\det R = \pm 1$ となることが分かるが、単に空間回転と言うときは $\det R = 1$ を指す。

まとめると、ベクトルとは関係式 (269) を満たす空間回転の下で

$$x'^i = R^i{}_j x^j, \quad (270)$$

$$x'_i = R_i{}^j x_j, \quad (271)$$

のように変換するものである。特に (270) のように変換するものを反変ベクトル、(271) のように変換するものを共変ベクトルと呼ぶ。共変ベクトルの変換は $R_i{}^j = (R^T)^j{}_i$ と転置行列を使って記述してもよい。

この講義では偏微分の記号を

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (272)$$

のように書く。偏微分の空間回転の下での変換は $x'^i R_i{}^j = x^j$ に注意すると

$$\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = R_i{}^j \partial_j, \quad (273)$$

となるので、添え字が下付きの共変ベクトルと同じ変換であることが分かる。また偏微分の添え字をクロネッカーのデルタで $\partial^i \equiv \delta^{ij} \partial_j$ のように上げることも問題なくできる。

$$\partial'^i = \delta^{ij} \partial'_j = \delta^{ij} R_j{}^k \partial_k = R^i{}_j \partial^j. \quad (274)$$

このように偏微分記号の添え字の位置には意味があって、回転変換の下で上付きは反変ベクトル、下付きは共変ベクトルのように振る舞う。また、縮約していない添え字の位置は式変形で変わらない。例えば、上式では i は常に上にある。

C.2 テンソル

一般のテンソル $T^{i_1 \dots i_m}{}_{j_1 \dots j_n}$ とは空間回転の下で

$$T'^{i_1 \dots i_m}{}_{j_1 \dots j_n} = R^{i_1}{}_{k_1} \dots R^{i_m}{}_{k_m} R_{j_1}{}^{l_1} \dots R_{j_n}{}^{l_n} T^{k_1 \dots k_m}{}_{l_1 \dots l_n}, \quad (275)$$

のように変換するものである。上付き添え字が m 個、下付き添え字が n 個なので、より明確に (m, n) テンソルと呼んだりもする。

特に (269) より

$$\delta'^{ij} = R^i{}_k R^j{}_l \delta^{kl} = \delta^{ij}, \quad (276)$$

なので、クロネッカーデルタは空間回転に対して不変なテンソルである。さらに、完全反対称テンソル ϵ^{ijk} も

$$\epsilon'^{ijk} = R^i{}_l R^j{}_m R^k{}_n \epsilon^{lmn} = \det R \epsilon^{ijk} = \epsilon^{ijk}, \quad (277)$$

なので不変テンソルである。なお完全反対称テンソルとは、添え字の入れ替えについて完全反対称 $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{kji} = -\epsilon^{ikj}$ で、1, 0, -1 の何れかの値を取るテンソルである。具体的には

$$\epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{312} = 1, \quad \epsilon^{213} = \epsilon^{132} = \epsilon^{321} = -1, \quad (278)$$

で他は0となる。

C.3 ベクトル解析の記法

ベクトル解析の記法をこれまでの記法で記述しておく。

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \partial_i V^i, \quad (279)$$

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{V} = W_i V^i, \quad (280)$$

$$(\operatorname{grad} \phi)_i = \partial_i \phi, \quad (281)$$

$$(\nabla \times \mathbf{V})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j V_k, \quad (282)$$

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{W})^i = \epsilon^{ijk} V_j W_k. \quad (283)$$

右辺の表記に慣れれば、ベクトル解析の公式は覚える必要がなくなる。

問 4 以下の等式を理解せよ。

$$1. \delta^{ij} \delta_{jk} = \delta_k^i. \quad \delta_j^i \delta^{kl} T^{jm}_{ln} = T^{imk}_n. \quad \delta_j^i \delta^{kl} \delta_{pm} T^{jm}_{ln} = T^i_{pkn}.$$

$$2. \epsilon^{ijk} \epsilon_{mnk} = \delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j. \quad \frac{1}{2!} \epsilon^{ijk} \epsilon_{mjk} = \delta_m^i. \quad \frac{1}{3!} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijk} = 1.$$

$$3. \epsilon^{ijk} V_j V_k = 0. \quad (\mathbf{V} \times \mathbf{V} = 0.)$$

$$4. \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \partial^i \partial_i \phi.$$

$$5. \operatorname{div} (\nabla \times \mathbf{V}) = \partial_i (\epsilon^{ijk} \partial_j V_k) = 0.$$

$$6. \epsilon^{ijk} (\epsilon_{jmn} V^m W^n) X_k = (V^k X_k) W^i - (W^k X_k) V^i. \\ ((\mathbf{V} \times \mathbf{W}) \times \mathbf{X} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{W} - (\mathbf{W} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{V}.)$$

D 4次元時空の記法

D.1 特殊相対性理論と光速不変の原理

特殊相対性理論は光速度不変の原理に基づく理論である。すなわち光の速さ c は慣性系によらず一定である、という実験事実に基づく理論体系である。これを具体的に式で表そう。慣性系の座標をそれぞれ $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$ および $x'^\mu = (ct', x'^1, x'^2, x'^3)$ とすると、光速不変の原理は座標変換を施しても

$$-(cdt)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = -(cdt')^2 + (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2, \quad (284)$$

となることを要求する。すなわち、4次元座標の間の座標変換は世界距離の2乗

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (285)$$

を不変にするような変換である。これを Lorentz 変換と呼ぶ。 $\eta_{\mu\nu}$ は計量テンソルとよばれるもので

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (286)$$

で与えられる。 $\eta_{\mu\nu}$ は Minkowski 時空の計量と呼ばれる、平坦な時空の計量テンソルである。

4次元時空 (x^0, x^1, x^2, x^3) の内積は、計量 $\eta_{\mu\nu}$ を用いて

$$x \cdot x \equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad (287)$$

のように表される。さらに $x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu$ と定義すると、内積は

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu, \quad (288)$$

のように記述することもできる。 $\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ ($\eta^2 = \mathbf{1}$) なので $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$ として矛盾はない。よって、添え字の上げ下げは $\eta^{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ を用いて行う。

D.2 ベクトル

4次元時空の座標を (x^0, x^1, x^2, x^3) のように表し、この座標を適当に Lorentz 変換させて得られる新たな座標を (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) とする。Lorentz 変換は世界距離の2乗 (285) を不変にする 4×4 行列 Λ による線形変換で

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^\mu{}_0 x^0 + \Lambda^\mu{}_1 x^1 + \Lambda^\mu{}_2 x^2 + \Lambda^\mu{}_3 x^3, \quad (289)$$

のように表すことにしよう。この式で μ, ν は 0, 1, 2, 3 の値を取り、 ν については和記号を省略している。以後 ν のように、上付き添え字と下付き添え字で2度現れる添え字については、特に断らない限り和を取るものとする。行列 Λ は世界距離の2乗を不変にする変換なので

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma = \eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma, \quad (290)$$

を満たす。すなわち

$$(\Lambda^T)^\rho{}_\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}, \quad (\Lambda^T \eta \Lambda = \eta), \quad (291)$$

を満たす。Lorentz 変換は3次元時空の空間回転を拡張した変換で、3つの独立な空間回転と3つの独立な Lorentz boost 変換を組み合わせで構成される。式 (291) で ρ を上げると、 $(\Lambda^T)^\rho{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma = \delta_\sigma^\rho$ となるので、

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = (\Lambda^T)^\mu{}_\nu, \quad (292)$$

であることが分かる。

4次元座標の足を下げたものは $dx'_\mu = \eta_{\mu\nu} dx'^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu dx_\nu = (\Lambda^T)^\nu{}_\mu dx_\nu = dx_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ のように変換する。これからも世界距離の2乗は Lorentz 変換で不変なスカラー量であることが分かる。一般に、縮約をとった添え字に関しては Lorentz 変換の下でスカラーのように振る舞うことが分かる。まとめると、ベクトルとは Lorentz 変換の下で

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (293)$$

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu = (\Lambda^T)^\nu{}_\mu x_\nu = x_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu, \quad (294)$$

のように変換するものである。特に (293) のように変換するものを反変ベクトル、(294) のように変換するものを共変ベクトルと呼ぶ。また4次元の運動量 $p^\mu = (E/c, p^1, p^2, p^3)$ は反変ベクトルとして振舞う。

4次元時空の偏微分の記号を

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (295)$$

のように書く。偏微分の空間回転の下での変換は $x'^\mu \Lambda_\mu{}^\nu = x^\nu$ に注意すると

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu, \quad (296)$$

となるので、添え字が下付きの共変ベクトルと同じ変換であることが分かる。また偏微分の添え字を $\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$ のように上げることも問題なくできる。

$$\partial'^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial'_\nu = \eta^{\mu\nu} \Lambda_\nu{}^\rho \partial_\rho = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu. \quad (297)$$

このように偏微分記号の添え字の位置には意味があつて、Lorentz 変換の下で上付きは反変ベクトル、下付きは共変ベクトルのように振る舞う。また、縮約していない添え字の位置は式変形で変わらない。例えば、上式では μ は常に上にある。

D.3 テンソル

一般のテンソル $T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}$ とは Lorentz 変換の下で

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_m}{}_{\rho_m} \Lambda_{\nu_1}{}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\nu_n}{}^{\sigma_n} T^{\rho_1 \dots \rho_m}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}, \quad (298)$$

のように変換するものである。上付き添え字が m 個、下付き添え字が n 個なので、より明確に (m, n) テンソルと呼んだりもする。

特に (291) より

$$\eta'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}, \quad (299)$$

なので、計量テンソルは Lorentz 変換に対して不変なテンソルである。さらに、4次元完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ も

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det \Lambda \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (300)$$

なので不変テンソルである。なお4次元完全反対称テンソルとは、任意の2つの添え字の入れ替えについて反対称 (例えば $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma}$) で、1, 0, -1 の何れかの値を取るテンソルである。 $\epsilon^{0123} = 1$ とすると、 $\epsilon_{0123} = -1$ である。

E 電磁気学の保存量

電磁気学の Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (301)$$

で与えられる。この作用には並進対称性と Lorentz 対称性があるので、それぞれに対応する保存量を Noether の方法で構成できる。

並進対称性

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - a^{\mu}, \quad A'^{\mu}(x') = A^{\mu}(x), \quad \delta_S A^{\mu} = a^{\nu} \partial_{\nu} A^{\mu}, \quad (302)$$

を考えよう。運動方程式 $\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 0$ を使って δS を計算すると

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} \partial_{\mu} \delta A_{\nu} = -\partial_{\mu} (F^{\mu\nu} \delta A_{\nu}), \quad (303)$$

となり、次に対称性を使うと

$$\delta_S \mathcal{L} = -F^{\mu\nu} \partial_{\mu} \delta_S A_{\nu} = -a^{\rho} F^{\mu\nu} \partial_{\rho} \partial_{\mu} A_{\nu} = \partial_{\rho} \left(-\frac{1}{4} a^{\rho} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (304)$$

となる。従って Noether カレントは

$$\begin{aligned} j^{\mu} &= -F^{\mu\nu} \delta_S A_{\nu} + \frac{1}{4} a^{\mu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \\ &= -a^{\rho} F^{\mu\nu} \partial_{\rho} A_{\nu} + \frac{1}{4} a^{\mu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \\ &= -a^{\rho} F^{\mu\nu} F_{\rho\nu} - a^{\rho} F^{\mu\nu} \partial_{\nu} A_{\rho} + \frac{1}{4} a^{\mu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \\ &= a^{\nu} \left(-F^{\mu\rho} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta_{\nu}^{\mu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) - \partial_{\nu} (F^{\mu\nu} a^{\rho} A_{\rho}), \end{aligned}$$

となる。最後の項はカレントの不定性なので無視してよい。保存量は

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x a^{\nu} \left(-F^{0i} F_{\nu i} + \frac{1}{4} \delta_{\nu}^0 F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) \\ &= a^0 \int d^3x \left(-F^{0i} F_{0i} + \frac{1}{4} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) + a^i \int d^3x \left(-F^{0j} F_{ij} \right) \\ &= a^0 \int d^3x \frac{1}{2} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) - a^i \int d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i, \end{aligned}$$

となる。これは電磁場があるときのエネルギー $E = \frac{1}{2} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)$ および運動量 $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ の表式である。

F 量子力学

質量 m の粒子の波動関数を $\psi(t, x)$ とすると、ポテンシャル $V(x)$ 中を運動する粒子に対する Schrodinger 方程式は

$$\left(-i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \partial^i - V(x) \right) \psi = 0, \quad (305)$$

のように表される。そして、量子力学の作用は上記の方程式を変分原理で与えるものなので、逆算して

$$S[\psi] = \int dt d^3x \psi^* \left(-i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \partial^i - V(x) \right) \psi, \quad (306)$$

とすればよい。波動関数 ψ は時空の各点で与えられる量であり、これを場と呼ぶ。作用は場を変数としているので、積分も 4 次元時空で行うことになる。ただしこのままでは作用は実になっていないので、全微分項を加えて

$$S[\psi] = \int dt d^3x \left(\frac{i\hbar}{2} \psi^* \partial_t \psi - \frac{i\hbar}{2} \partial_t \psi^* \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \psi^* \partial^i \psi - V(x) \psi^* \psi \right), \quad (307)$$

のように修正する。

実際の電子はスピンと呼ばれる内部自由度を持つ。スピンの自由度は波動関数を 2 成分 ψ^α ($\alpha = 1, 2$) に修正することで実現できる。このような 2 成分場をスピノル場という。このとき作用は

$$S[\psi] = \int dt d^3x \left(\frac{i\hbar}{2} \psi_\alpha^* \partial_t \psi^\alpha - \frac{i\hbar}{2} \partial_t \psi_\alpha^* \psi^\alpha - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \psi_\alpha^* \partial^i \psi^\alpha - V(x) \psi_\alpha^* \psi^\alpha \right), \quad (308)$$

のように与えられる。非積分関数 \mathcal{L} は Lagrangian density と呼ばれる。なお、スピノルの添字 α は行列表記によって省略することが多い。例えば、 $\partial_i \psi^\dagger \partial^i \psi = \partial_i \psi_\alpha^* \partial^i \psi^\alpha$ や $\psi^\dagger \psi = \psi_\alpha^* \psi^\alpha$ などのようにである。

F.1 空間回転 SO(3) とスピノル場の変換

空間回転を表す 2×2 行列を R とすると、 R は

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = e^{-iX}, \quad X = \theta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (309)$$

のように表すことができる。そこで、同様に空間回転を表す 3×3 行列を $R = e^{-iX}$ とすると、 R は $\mathbf{1}_3 = R^T R = \mathbf{1}_3 - i(X^T + X) + \dots$ を満たすので、 $X^T = -X$ となって X は反対称行列となる必要がある。(上の例では確かにそうになっている。) X を

$$X = \theta^i X_i = \theta^1 X_1 + \theta^2 X_2 + \theta^3 X_3, \quad (310)$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (311)$$

のように取ると、回転行列の積は X_i の間の交換関係が分かれば計算可能となる。何故ならば、一般に Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$$e^{-iX} e^{-iY} = e^{-i(X+Y) - \frac{1}{2}[X,Y] + \dots}, \quad (312)$$

が成り立ち、右辺の省略した部分は交換関係を使って書き表されるからである。 X_i の交換関係は

$$[X_i, X_j] = i\epsilon_{ijk}X^k, \quad (313)$$

のように計算され、回転行列の積はこの関係式 (Lie 代数) で特徴づけられる。

では Lie 代数 (313) を満たすような行列にはどのようなものがあるだろうか？既にみたように 3×3 行列 (311) は 1 つの実現例であり、3次元表現と呼ばれる。もう一度明記しておく

$$3 \text{次元表現: } R = e^{-i\theta^i X_i}, \quad (X_i)^j{}_k = -i\epsilon_i{}^j{}_k, \quad (314)$$

である。次に Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (315)$$

を考えると、 $[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}] = i\epsilon_{ijk}\frac{\sigma^k}{2}$ なので、 $\frac{\sigma_i}{2}$ は X_i と同じ交換関係を満たすことが分かる。Pauli 行列は 2×2 行列なので、2次元表現と呼ばれる。すなわち

$$2 \text{次元表現: } \Sigma = e^{-i\theta^i \frac{\sigma_i}{2}}, \quad \sigma_i : \text{Pauli 行列}, \quad (316)$$

である。実は 2次元表現と 3次元表現には次のような関係がある。

$$\Sigma^{-1} \sigma^i \Sigma = R^i{}_j \sigma^j. \quad (317)$$

この関係式の証明を与える。まず $M^i(t) \equiv \Sigma^{-t} \sigma^i \Sigma^t$ と置いて、 t で微分すると

$$\frac{dM^i(t)}{dt} = \Sigma^{-t} \frac{i}{2} \theta_k [\sigma^k, \sigma^i] \Sigma^t = -\theta_k \epsilon^{ki}{}_j M^j(t) = (-i\theta^k X_k)^i{}_j M^j(t), \quad (318)$$

となる。よって解は $M^i(t) = (e^{-it\theta^k X_k})^i{}_j M^j(0) = (R^t)^i{}_j \sigma^j$ となり、 $t = 1$ とすれば式 (317) が得られる。

2次元表現によって回転変換する場のことを 2成分のスピンル場と呼ぶ。スピンル場を $\psi^\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2$) と書くと、 $\psi^\alpha(x)$ の回転変換は

$$x'^i = R^i{}_j x^j, \quad \psi'^\alpha(x') = \Sigma^\alpha{}_\beta \psi^\beta(x), \quad (319)$$

のように与えられる。これより例えば $\psi^\dagger \sigma^i \psi$ はベクトルとして変換し、 $\psi^\dagger \sigma^i \partial_i \psi$ はスカラーとして変換することが分かる。

F.2 回転対称性と角運動量保存

作用 (308) に関して Noether の定理を適用して、回転対称性と角運動量保存について考察しよう。空間回転におけるスピンル場 ψ の変換は

$$\begin{aligned} x'^i &= R^i{}_j x^j \sim x^i - \epsilon^i{}_{jk} \theta^k x^j, \\ \psi'^\alpha(x') &\sim \psi^\alpha(x) - \epsilon^i{}_{jk} \theta^k x^j \partial_i \psi^\alpha(x) \\ &= \Sigma^\alpha{}_\beta \psi^\beta(x) \sim \psi^\alpha(x) - \frac{i}{2} \theta^k (\sigma_k)^\alpha{}_\beta \psi^\beta(x), \end{aligned} \quad (320)$$

なので、微小変換は

$$\delta\psi = \theta^k \left(-\epsilon_{kij} x^i \partial^j \psi - \frac{i}{2} \sigma_k \psi \right), \quad (321)$$

となる。ここでスピノルの足は省略した。これより Lagrangian の微小変換は

$$\delta\mathcal{L} = -\theta^k \epsilon_{kij} x^i \partial^j \mathcal{L}, \quad (322)$$

となり、これは全微分項なので作用は回転変換の下で不変であることが分かる。次に $\delta\mathcal{L}$ を運動方程式を使って評価すると

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \partial_t \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} \delta\psi \right) + \partial_\ell \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\ell\psi)} \delta\psi \right) + (\text{c.c.}) \\ &= \theta^k \partial_t \left(-\frac{i\hbar}{2} \epsilon_{kij} x^i (\psi^\dagger \partial^j \psi - \partial^j \psi^\dagger \psi) + \frac{\hbar}{2} \psi^\dagger \sigma_k \psi \right) \\ &\quad + \theta^k \partial_\ell \left(\frac{\hbar^2}{2m} \epsilon_{kij} x^i \partial^\ell (\psi^\dagger \partial^j \psi + \partial^j \psi^\dagger \psi) + \frac{i\hbar^2}{4m} (\partial^\ell \psi^\dagger \sigma_k \psi - \psi^\dagger \sigma_k \partial^\ell \psi) \right), \end{aligned} \quad (323)$$

となる。式 (322) と (323) よりカレントを

$$j^t_k = -\frac{i\hbar}{2} \epsilon_{kij} x^i (\psi^\dagger \partial^j \psi - \partial^j \psi^\dagger \psi) + \frac{\hbar}{2} \psi^\dagger \sigma_k \psi, \quad (324)$$

$$j^\ell_k = \frac{\hbar^2}{2m} \epsilon_{kij} x^i \partial^\ell (\psi^\dagger \partial^j \psi + \partial^j \psi^\dagger \psi) + \frac{i\hbar^2}{4m} (\partial^\ell \psi^\dagger \sigma_k \psi - \psi^\dagger \sigma_k \partial^\ell \psi) + \epsilon_{kij} x^i \mathcal{L}, \quad (325)$$

と定義すれば、カレントの保存則 $\partial_t j^t_k + \partial_\ell j^\ell_k = 0$ が成り立つ。さらに保存量は

$$\begin{aligned} J_k &= \int d^3x j^t_k \\ &= \int d^3x \psi^\dagger \left(\epsilon_{kij} x^i (-i\hbar \partial^j) + \frac{\hbar}{2} \sigma_k \right) \psi, \end{aligned} \quad (326)$$

のように与えられる。第1項は軌道角運動量、第2項はスピン角運動量と呼ばれる量で、これらの和が全角運動量として保存する。

F.3 ゲージ対称性とゲージ相互作用

局所的 U(1) 変換は、大域の変換のパラメータを時空に依存するようにしたものである。

$$\psi'(x) = e^{i\theta(x)} \psi(x). \quad (327)$$

この変換の下で $\psi^* \psi$ は不変だが、微分を含んだ項は不変ではない。実際、 $\partial_\mu \psi' = e^{i\theta} \partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \theta) e^{i\theta} \psi$ となって右辺第2項が余分となってしまふ。そこで、この項を相殺するためにゲージ場を導入して微分を修正する。具体的には

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{e}{\hbar} A_\mu, \quad (328)$$

のように微分を共変微分に置き換える。ここで e は電荷であり、 \hbar は次元を合わせるために入っている。局所的 U(1) 変換の下でゲージ場は

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\hbar}{e} \partial_\mu \theta(x), \quad (329)$$

のように変換するとすれば、 $(D_\mu \psi)' = e^{i\theta} D_\mu \psi$ となることが分かる。よって、式 (307) において微分を共変微分に置き換えれば、作用は局所的 U(1) 変換の下で不変となる。

局所的 U(1) 変換で不変であり、かつ空間回転 SO(3) の下で ψ が 2 次元表現に属するような作用は

$$S[\psi] = \int dt d^3x \left(\frac{i\hbar}{2} \psi^\dagger D_t \psi - \frac{i\hbar}{2} (D_t \psi)^\dagger \psi - \frac{\hbar^2}{2m} (D_i \psi)^\dagger \sigma^i \sigma^j D_j \psi - V(x) \psi^\dagger \psi \right), \quad (330)$$

のように与えられる³。ここで関係式

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma_k, \quad (331)$$

$$[D_i, D_j] = -i \frac{e}{\hbar} F_{ij} = -i \frac{e}{\hbar} \epsilon_{ijk} B^k, \quad (332)$$

を使うと、Lagrangian の第 3 項目は

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} (D_i \psi)^\dagger \sigma^i \sigma^j D_j \psi \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} (D_i \psi)^\dagger D^i \psi - \frac{i\hbar^2}{2m} \epsilon^{ijk} (D_i \psi)^\dagger \sigma_k D_j \psi \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} (D_i \psi)^\dagger D^i \psi - \frac{i\hbar^2}{2m} \epsilon^{ijk} \partial_i (\psi^\dagger \sigma_k D_j \psi) + \frac{i\hbar^2}{2m} \epsilon^{ijk} \psi^\dagger \sigma_k D_i D_j \psi \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} (D_i \psi)^\dagger D^i \psi - \frac{i\hbar^2}{2m} \epsilon^{ijk} \partial_i (\psi^\dagger \sigma_k D_j \psi) + \frac{e\hbar}{2m} \psi^\dagger \sigma_k B^k \psi, \end{aligned} \quad (333)$$

のように書きかえることができる。従って作用は

$$S[\psi] = \int dt d^3x \left(\frac{i\hbar}{2} \psi^\dagger D_t \psi - \frac{i\hbar}{2} (D_t \psi)^\dagger \psi - \frac{\hbar^2}{2m} (D_i \psi)^\dagger D^i \psi - V(x) \psi^\dagger \psi + \frac{e\hbar}{2m} \psi^\dagger \sigma_k B^k \psi \right), \quad (334)$$

となる。これは波動関数 ψ で記述される粒子が磁気能率 $\mu^k = 2 \times \frac{e\hbar}{2m} \frac{\sigma^k}{2}$ を持つことを表している。係数 $g = 2$ を g 因子と呼ぶ。

³実は回転対称性だけではここまで一意的には決まらない。単に $(D_i \psi)^\dagger D^i \psi$ の項を任意の係数で加えることができる。後でみるように、Dirac は Lorentz 対称性を課して Lagrangian を一意的に決め、粒子には反粒子が対で存在することを数理的に予言した。